HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ
KHOA Công nghệ Thông tin

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập – Tự do – Hạnh phúc

ĐỀ CƯƠNG CHI TIẾT HỌC PHẦN
HÀM BIẾN SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

1. Thông tin về giáo viên

TT	Họ tên giáo viên	Học hàm	Học vị	Đơn vị công tác (Bộ môn)
1	Phạm Tiến Dũng	Giảng viên chính	TS	Bộ môn Toán
2	Bùi Văn Định	Giảng viên	ThS	Bộ môn Toán
3	Đào Trọng Quyết	Giảng viên	Ths	Bộ môn Toán
4	Bùi Thị Hoàng Yến	Giảng viên	Ths	Bộ môn Toán
5	Nguyễn Văn Hồng	Giảng viên	Ths	Bộ môn Toán

Thời gian, địa điểm làm việc: Bộ Môn Toán, P1408, Nhà A1 (Gần đường HQ Việt)
Địa chỉ liên hệ: Bộ môn Toán, Khoa CNTT, Học viện KTQS, 100 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội
Điện thoại, email: 069 515 330, bomontoan_hvktqs@yahoo.com
Các hướng nghiên cứu chính: Giải tích, Phương trình vi phân, Phương trình đạo hàm riêng. Toán tối ưu.

2. Thông tin chung về học phần

- Tên học phần: **HÀM BIẾN SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI**
- Mã học phần: 12.1.30.1.5
- Số tín chỉ: 2
- Học phần (bắt buộc hay lựa chọn): Bắt buộc
- Các học phần tiên quyết: Đại số, Giải tích 1 và 2,
- Các yêu cầu đối với học phần (nếu có): sinh viên cần nắm kiến thức cơ bản, các phép biến đổi để phục vụ cho các chuyên ngành như: Điện, Điện tử, CNTT, cơ…
- Giờ tín chỉ đối với các hoạt động:
  - Nghe giảng lý thuyết : 26
  - Làm bài tập trên lớp : 17
  - Thảo luận : Thảo luận giảng lý thuyết và bài tập
  - Thực hành, thực tập (ở PTN, nhà máy, thực tập...):
  - Ôn Tập - Kiểm tra: 2
  - Hoạt động theo nhóm:
  - Tự học:
- Khoa/Bộ môn phụ trách học phần, địa chỉ: Bộ Môn Toán, P1408, Nhà A1

3. Mục tiêu của học phần

1. Kiến thức: Trang bị cho học viên những kiến thức cơ bản của Giải tích biến số phức và một số phép biến đổi làm cơ sở học tập và nghiên cứu các môn học chuyên ngành.
   Kỹ năng: Vận dụng lý thuyết giải được các bài tập đã cho và cài đặt chương trình được cho một số giải thuật được giới thiệu.

4. Tóm tắt nội dung học phần

Chương 1. Hàm số biến số phức: giới thiệu những khái niệm cơ bản về số phức, hàm số biến phức và các tính chất như giới hạn, liên tục, đạo hàm, tích phân. Khái niệm về chuỗi hàm, chuỗi Taylo, Laurent. Khái niệm thặng dư, cách tính và vận dụng

Chương 2. Phép tính toán tử: Cần nắm vững một số phép biến đổi như Laplace, biến đổi Z. Vận dụng.

5. Nội dung chi tiết học phần *(tổng số tiêt : 45=26+17+2)*

Số TT đề mục	**Tên gọi các phần, các đề mục**	**Số tiết**	**Giáo trình, tài liệu tham khảo**	**Ghi chú**
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	CHƯƠNG I: Giải tích phức	12+11+1	1,2,3,4	
I.1	**Hàm số biến số phức** **1.1**Số phức và mặt phẳng phức **1.2** Hàm số biến số phức, giới hạn và tính liên tục **1.3**. Đạo hàm của hàm biến phức **1.4** Điều kiện Cauchy - Riemann **1.5** Hàm giải tích và hàm điều hoà **1.6** Một số hàm giải tích cơ bản	5 + 2		
I.2	**Tích phân hàm biến phức** **2.1** Định nghĩa và tính chất **2.2** Nguyên hàm và công thức Newton-Leibnitz **2.3** Định lý Cauchy **2.4** Công thức tích phân Cauchy **2.5** Tích phân loại Cauchy	4 + 2		

I.3 I.4 I.5	**Chuỗi** **3.1** Chuỗi Taylor **3.2** Chuỗi Laurent **3.3** Phân loại điểm bất thường **Thặng dư** **4.1** Khái niệm thặng dư **4.2** Các định lý cơ bản về thặng dư **4.3** Tính tích phân bằng thặng dư **Kiểm tra Chương I**	3 + 2 3 + 2 1		
  II.1 II.2	**CHƯƠNG II:Phép tính toán tử** **Phép biến đổi Laplace** **1.1** Định nghĩa phép biến đổi Laplace **1.2** Các tính chất của phép biến đổi Laplace **1.3** Tích chập và định lý Duamel **1.4** Phép biến đổi Laplace ngược **1.5** Ứng dụng biến đổi Laplace. **Phép biến đổi Z** **2.1** Định nghĩa phép biến đổi **Z** **2.2** Các tính chất của phép biến đổi **Z** **2.3** Phép biến đổi **Z** ngược **2.4** Ứng dụng của phép biến đổi Z **Kiểm tra Chương II**	14 + 7 10+ 4 4 + 1 2	1,2,3,4	

6. Giáo trình, tài liệu tham khảo

TT	Tên giáo trình, tài liệu	Tình trạng giáo trình, tài liệu			
	Giáo trình	Có ở thư viện (website)	Giáo viên hoặc khoa có	Đề nghị mua mới	Đề nghị biên soạn
1	Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978	x			
2	Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998	x	x		
3	B.A. Fukxo và B.V. Sabat, *Hàm biến phức và ứng dụng,NXBKH, 1969(bản dịch)*	x	x		
4	E.J. Savant, *Fundamentals of the Laplace Transform* .Mc Graw- Hill Book company, 1986.		x		
5	*Hàm số biến số phức và các phép biến đổi*				x

7. Hình thức tổ chức dạy học

7.1. Lịch trình chung: (Ghi tổng số giờ cho mỗi cột)

Nội dung	**Hình thức tổ chức dạy học học phần**					**Tổng**
	Lên lớp			**T.h., t.n., t.t**	**Tự học, tự ng.cứu**	
	Lý thuyết	**Bài tập**	**KT**			
Chương 1: Giải tích phức	**15**	**8**	**1**			**24**
1.1Số phức và mặt phẳng phức **1.2** Hàm số biến số phức, giới hạn và tính liên tục **1.3**. Đạo hàm của hàm biến phức **1.4** Điều kiện Cauchy - Riemann **1.5** Hàm giải tích và hàm điều hoà **1.6** Một số hàm giải tích cơ bản	5	2				
Tích phân hàm biến phức **2.1** Định nghĩa và tính chất **2.2** Nguyên hàm và công thức Newton-Leibnitz **2.3** Định lý Cauchy **2.4** Công thức tích phân Cauchy **2.5** Tích phân loại Cauchy	4	2				
Chuỗi **3.1** Chuỗi Taylor	3	2				

3.2 Chuỗi Laurent **3.3** Phân loại điểm bất thường						
Thặng dư **4.1** Khái niệm thặng dư **4.2** Các định lý cơ bản về thặng dư **4.3** Tính tích phân bằng thặng dư **Kiểm tra Chương I**	3	2	1			
Chương 2. Phép tính toán tử	**14**	**7**	**1**			**22**
Phép biến đổi Laplace **1.1** Định nghĩa phép biến đổi Laplace **1.2** Các tính chất của phép biến đổi Laplace **1.3** Tích chập và định lý Duamel **1.4** Phép biến đổi Laplace ngược **1.5** Ứng dụng biến đổi Laplace.	10	4				
Phép biến đổi Z **2.1** Định nghĩa phép biến đổi **Z** **2.2** Các tính chất của phép biến đổi **Z** **2.3** Phép biến đổi **Z** ngược **2.4** Ứng dụng của phép biến đổi Z	4	1				
Kiểm tra Chương II		2	1			

7.2. Lịch trình tổ chức dạy học cụ thể

Bài giảng 1: Giải Tích Phức

Chương I, Mục: 1.1-1.3

Tiết thứ: 1-3 Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:

* Giới thiệu về tập số phức; phép toán trên trường số phức, một số tính chât .

* Khái niệm hàm số biến phức, giới hạn và tính liên tục, đạo hàm của hàm biến phức

* Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản

- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 3t; Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính:*** **CHƯƠNG 1. Giải Tích Phức**

1.1. Hàm số biến phức

Ví dụ 1. Tính $\sqrt[3]{1}$: vì $1 = \cos 0 + i\sin 0$ 1 = cos0 + isin0 nên theo công thức (1.6) ta có

$$\omega_k = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Khi k = 0, $\omega_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$;

khi k = 1, $\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

khi k = 2, $\omega_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thực hiện kiểm tra: $\omega_0^3 = 1^3 = 1$,

$$\omega_1^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos\left(3\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(3\frac{2\pi}{3}\right) = 1,$$

$$\omega_2^3 = 1,$$

1.2 Giới hạn và tính liên tục

1.3. Đạo hàm

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:*** Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

Bài giảng 2: **Giải Tích Phức (tiếp)**

Chương I,   Mục: 1.4-1.6

Tiết thứ: 4-7   Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:
  * Định lý Cosi-Rieman, khái niệm hàm giải tích,
  * ý nghĩa hình học của modun và arg, hàm điều hòa, một số hàm cơ bản.
  * Vận dụng giải một số bài tập đơn giản
- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 2t;   BT: 2t, Tự học: 3t

- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính:***

1.4. Điều kiện cần và đủ để hàm có đạo hàm

Khảo sát trong miền D hàm đơn trị $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Tính khả vi của hàm $\text{Re}\,\omega = u(x,y)$ và $\text{Im}\,\omega = v(x,y)$ chưa chắc đảm bảo tính khả vi của hàm số biến phức.

Ví dụ 1. Khảo sát tính khả vi của hàm $\omega = z.\text{Im}\,z$.

1. Khái niệm hàm giải tích

Ví dụ 2. Hàm số $\omega = z^2$ là giải tích trên toàn mặt phẳng phức C.

2. Quy tắc lấy đạo hàm

Quy tắc lấy đạo hàm ta đã biết trong toán giải tích đối với trường hợp biến thực, và bây giờ mở rộng cho vi phân hàm biến phức.

3. Điều kiện C-R dạng tọa độ cực

7. Ý nghĩa hình học của $|f'(z_0)|$ và $\text{Arg}\,f'(z_0)$

Kết luận. Nếu hàm số $\omega = f(z)$ giải tích tại điểm z_0 và $f'(z_0) \neq 0$ thì ánh xạ $\omega = f(z)$ có tính chất bảo toàn góc và hệ số co giãn tại z_0. Ánh xạ như vậy được gọi là ánh xạ bảo giác tại z_0. Ánh xạ $\omega = f(z)$ là bảo giác trên miền D nếu nó bảo giác tại mọi điểm trong D.

1.5. Hàm điều hoà

Ví dụ. Tìm hàm giải tích $\omega = f(z)$ nếu biết phần thực của nó $u(x,y) =$

$= x^3 - 3xy^2, \omega(0) = 0.$

1.6. Một số hàm giải tích cơ bản

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:*** Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

Bài giảng 3: Tích phân hàm biến phức

Chương I,   Mục: 2.1-2.3

Tiết thứ: 8-10   Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:

  * Khái niệm về tích phân hàm biến phức, các tính chất
  * Tích phân Cosi cho miền đơn và đa lien, công thức tich phân Cosi.
  * Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản

- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 3t;   Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính*** **: Tích phân hàm biến phức**

2.1 Định nghĩa và các tính chất

2.2 Nguyên hàm và công thức Newton-Lepnit

1. Định lý Côsi cho miền đơn liên

Ví dụ. Tính $\int_{-1}^{i} z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_{-1}^{i} = \frac{1}{3}(1-i).$ ►

2. Định lý Côsi cho miền đa liên

3. Công thức tích phân Côsi

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:***Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998.

Bài giảng 4: Tích phân hàm biến phức (tiếp)

Chương III,   Mục: 2.4-2.6

Tiết thứ: 11-13   Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:

  * Tính khả tích, tính khả vi của một hàm giải tích .
  * Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản

- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 1t;   BT: 2t, Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính:***

2.4 Tính tích phân trên đường cong kín Jordan trơn từng khúc

Ví dụ 5. Tính tích phân $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}.$

Ví dụ 6. Tính tích phân $\oint\limits_{|z|^{+}=2} \frac{\cos z}{z(z+5)} dz.$

2.5 Tính khả vi vô hạn của hàm giải tích

Ví dụ. Tính tích phân $\oint\limits_{|z|^{+}=2} \frac{\sin z}{z^4} dz..$

2.6. Bài tập tự giải

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:*** Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

Bài giảng 5: Chuỗi

Chương I, Mục:3.1-3.2

Tiết thứ: 14-16 Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:
  * Khái niệm về chuỗi Taylo, khai triển hàm giải tích thành chuỗi Taylo.
  *Khái niệm về chuỗi Lorang, định lý Lorang .
  * Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản
- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 2t; BT: 1t, Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính:***

3.1. Chuỗi Taylo

Ví dụ 3. Tìm ba số hạng đầu tiên trong khai triển Taylo của hàm $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ trong lân cận điểm $z_0 = 0.$

Ví dụ 4. Tìm khai triển hàm $\cos z^2$ thành chuỗi Taylo trong lân cận điểm $z_0 = 0$ theo luỹ thừa z.

Ví dụ 5. Khai triển hàm $f(z) = \frac{1}{1+z}$ thành chuỗi Taylo theo luỹ thừa z.

Có thể giải ví dụ 5 bằng phương pháp khác. Hàm $f(z) = \frac{1}{1+z}$ là tổng của cấp số nhân giảm vô hạn với công bội $q = -z:$

$$\frac{1}{1+z}=1+(-z)+(-z)^2-...+(-z)^n+...=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$$

Ví dụ 6. Khai triển hàm $f(z)=\dfrac{1}{z-4}$ trong lân cận điểm $z_0=2.$

Ví dụ 7. Khai triển hàm $f(z)=\dfrac{z+8}{(z-2)(z+3)}$ thành chuỗi Taylo trong lân cận điểm $z_0=1.$

Ví dụ 8. Khai triển hàm $f(z)=\dfrac{13}{(z^2-4)(z^2+9)}$ thành chuỗi Taylo trong lân cận điểm $z_0=0.$

Ví dụ 9. Tìm khai triển hàm $f(z)=e^z chz$ thành chuỗi Taylo theo luỹ thừa của z.

Ví dụ 10. Khai triển hàm $f(z)=e^{\sin z}$ thành chuỗi Taylo với tâm tại điểm $z_0=0.$

3.2. Khái niệm về chuỗi Lorăng

Ví dụ 1. Tìm tất cả các khai triển có thể của hàm số sau thành chuỗi Lolăng theo luỹ thừa z

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}.$$

Ví dụ 2. Khai triển hàm $f(z)=\sin\dfrac{1}{z-2}$ thành chuỗi Lorăng trong lân cận điểm $z_0=2.$

Ví dụ 3. Khai triên hàm $f(z)=\cos\dfrac{z-1}{z-2}$ thành chuỗi Lorăng theo luỹ thừa $z-2.$

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:***Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

Bài giảng 6: Chuỗi (tiếp)

Chương I, Mục: 3.2-3.3

Tiết thứ: 17-19 Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:

  * Khái niệm điểm bất thường và phân loại chúng

  * Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản

- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 2t; BT: 1t, Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính:***

3.3. Điểm bất thường và phân loại chúng

Ví dụ 1. Cho hàm $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, chứng minh rằng điểm bất thường cô lập $z_0=0$ là điểm bất thường bỏ được.

Ví dụ 2. Hàm $f(z)=\cos\frac{1}{z-2}$ có điểm bất thường cốt yếu $z_0=2$ vì trong miền $0<|z-2|<+\infty$ chuỗi Lorăng

$$\cos\frac{1}{z-2}=1-\frac{1}{2!(z-2)^2}+...+(-1)^n\frac{1}{2!(z-2)^{2n}}+...$$

chứa trong phần chính gồm vô số các số hạng với hệ số khác không.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $f(z)=e^{1/z}$ có điểm bất thường cốt yếu tại $z_0=0$.

2.Khai triển hàm giải tích thành chuỗi Lorăng trong lân cận điểm vô cực

Xác định dạng của điểm bất thường $z=\infty$.

1) Hàm $\omega=\frac{1}{5+z}$

Trong lân cận $|z|>5$, khai triển hàm thành chuỗi Lorăng

$$\frac{1}{5+z}=\frac{1}{z\left(1+\frac{5}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{5}{z}+\frac{5^2}{z^2}-\frac{5^3}{z^3}...\right)=\frac{1}{z}-\frac{5}{z^2}+...+\frac{(-5)^n}{z^{n+1}}+...$$

Trong chuỗi khai triển Lorăng thiếu vắng những phần tử với luỹ thừa dương của z nên điểm $z=\infty$ là điểm bất thường bỏ được.

2) Hàm $f(z)=\cos z$.

3. Hàm nguyên và hàm phân hình

Ví dụ 3. Những hàm nguyên $\sin z$, $\cos z$, e^z có $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu.

Ví dụ 4. Hàm $tgz = \frac{\sin z}{\cos z}$, $ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}$ là phân hình trong mặt phẳng $\mathbb{C}$. Hàm phân hình $f(z)$ có thể biểu diễn ở dạng thương của hai hàm nguyên $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, bởi vì không điểm của hàm $\psi(z)$ là cực điểm của hàm $f(z)$.

Trong mặt phẳng phức C cực điểm của hàm $f(z)$ là không điểm của mẫu.

4. Bài tập

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:*** Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

Bài giảng 7: Thặng dư

Chương I, Mục:4.1-4.2

Tiết thứ: 20-22 Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:

  * Định nghĩa thặng dư, và các tính chất; phương pháp tính thặng dư
  * Định lý cơ bản về thặng dư, thặng dư loga
  * Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản

- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 3t; BT: , Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường

  - ***Nội dung chính:***

4.1.Định nghĩa thặng dư

1. Phương pháp cơ bản tính thặng dư

Định lý. Thặng dư của hàm $f(z)$ tại điểm bất thường cô lập z_0 bằng hệ số c_{-1} của chuỗi Lorăng hàm $f(z)$ trong lân cận điểm z_0

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}. \qquad (8.2).$$

Ví dụ 1. Tìm thặng dư hàm $f(z) = ze^{1/z}$ tại điểm bất thường $z_0 = 0$.

Ví dụ2. Tìm thặng dư của hàm số $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z-2}$ tại $z_0 = 2$.

2. Tính thặng dư hàm số tại cực điểm

3. Thặng dư hàm số tại điểm vô cực

Ví dụ 1. Tìm thặng dư hàm $f(z)$ nếu điểm $z = \infty$ là điểm bất thường bỏ được.

Ví dụ 2. Tìm thặng dư hàm số $f(z) = e^{1/z}$ tại điểm bất thường vô cực $z = \infty$.

Ví dụ 3. Tìm thặng dư hàm số $f(z) = \cos z$ tại điểm $z = \infty$.

Ví dụ 4. Tìm thặng dư hàm $f(z) = \dfrac{z^3}{z+2}$ tại điểm $z = \infty$.

4.2. Định lý cơ bản về thặng dư (định lý Côsi về thặng dư)

Ví dụ 1. Tính tích phân bằng thặng dư $\oint\limits_{L^+} \dfrac{dz}{(z+1)^2(z^2+1)}$, ở đó $L -$ đường tròn:

$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0.$

Ví dụ 2. Tính $\oint\limits_{|z|^+=2} \dfrac{zdz}{(z+1)(z^2+1)}$.

1. Thặng dư loga

Ví dụ. Tìm thặng dư loga của hàm $f(z) = \dfrac{z^2+4}{(z-2)^3(z+1)}$ tại không điểm và cực điểm.

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:***Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

Bài giảng 8: Thặng dư (tiếp)

Chương I, Mục:4.3

Tiết thứ: 23-25 Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:

  * Định nghĩa thặng dư, và các tính chất.

  * Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản

- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu

- ***Thời gian:*** LT: 2t;   KT BT: 1t, Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính:***

4.3. Ứng dụng thặng dư vào tính tích phân

1. Tính tích phân của hàm biến phức

Áp dụng công thức (8.9) và (8.10) tính tích phân dọc theo chu tuyến L.

Ví dụ. Tính $\oint\limits_{|z|^+=2} \frac{zdz}{(z^2+1)(z-1)}$.

2.Tính tích phân dạng $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, **ở đó** $R-$**hàm hữu tỉ đối với sinx và cosx**

Ví dụ. Tính $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx$.

3. Tính tích phân dạng $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

4. Bổ đề Jordan và áp dụng nó để tính tích phân.

Ví dụ. Tính $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4+1}$.

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+9}dx$.

Ví dụ 3. Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin 4x}{x^2+9}dx$.

Ví dụ 4. Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:*** Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

Bài giảng 9: Phép tính toán tử

Chương II,   Mục:1.1-1.3

Tiết thứ: 25-29 Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:
  * Giới thiệu về toán tử Laplax và 1 số tính chất.
  * Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản
- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 3t; BT: 1t, Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính*** **Chương II. CƠ SỞ PHÉP TÍNH TOÁN TỬ**

1.1 Phép biến đổi Laplace

1. Khái niệm biến đổi Laplace

2. Tính hội tụ của tích phân Laplace

1.2. Tính chất cơ bản của biến đổi Laplace

Ảnh của một số hàm đơn giản (bài tập)

1. $x(t)=1$. Chứng minh rằng

$$1 \leftarrow \frac{1}{p}.$$

2. $x(t)=e^{\alpha t}$. Chứng minh rằng

$$e^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{p-\alpha}.$$

3. $x(t)=\cos\omega t$. Chứng minh rằng

$$\cos\omega t \leftarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

4. $x(t)=\sin\omega t$. Chứng minh rằng

$$\sin\omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

5. $x(t)=t^n$. Chứng minh rằng

$$t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

6. $x(t)=t\cos\omega t$. Chứng minh rằng

$$t\cos\omega t \leftarrow \frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$$

7. $x(t) = t\sin\omega t$. Chứng minh rằng

$$t\sin\omega t \leftarrow \frac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$$

8. $e^{\alpha t}\cos\omega t \leftarrow \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$;

9. $e^{\alpha t}\sin\omega t \leftarrow \dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$;

10. $e^{\alpha t}t^n \leftarrow \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$;

11. $te^{\alpha t}\cos\omega t \leftarrow \dfrac{(p-\alpha)^2-\omega^2}{\left[(p-\alpha)^2+\omega^2\right]^2}$;

12. $te^{\alpha t}\sin\omega t \leftarrow \dfrac{2p\omega(p-\alpha)}{\left[(p-\alpha)^2+\omega^2\right]^2}$;

13. $\operatorname{sh}\omega t = \dfrac{1}{2}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right) \leftarrow \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$;

14. $\operatorname{ch}\omega t = \dfrac{1}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right) \leftarrow \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$.

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:***Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

Bài giảng 10: Phép biến đổi Laplace (tiếp)

Chương II, Mục: 1.4.

Tiết thứ: 30-33 Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:
  * Giải quyết bài toán biến đổi ngược.
  * Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản
- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 3t; BT: 1t, Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính***

1.4. Khôi phục hàm gốc theo hàm ảnh đã biết

Bài tập

Ví dụ 2. Tìm hàm gốc của hàm $X(p)=\frac{1}{p}e^{-1/p}$.

Ví dụ 3. Tìm hàm gốc của hàm

$$X(p)=\frac{5p+3}{(p-1)\left(p^2+2p+5\right)}.$$

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:*** Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978

TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức*, HVKTQS ,1998

Bài giảng 11: Phép biến đổi Laplace (tiếp)

Chương II, Mục:1.5

Tiết thứ: 34-39 Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:
  - * Ứng dụng phép biến đổi Laplace giải quyết bài toán Cosi với điều kiện ban đầu.
  - * Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản
- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 3t; BT: 2t, KT: 1 Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính***

5. Bảng hàm ảnh

TT	**x(t)**	**X(p)**	**Nghiệm**	**x(t)**	**X(p)**
1	1	$\frac{1}{p}$	12	$te^{\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-\alpha)}{\left[(p-\alpha)^2+\omega^2\right]^2}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	13	$\text{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
3	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	14	$\text{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	15	$t^n x(t)$	$(-1)^n\frac{d^nX(p)}{dp^n}$

5	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	16	$x'(t)$	$pX(p)-x(0)$
6	$t.\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$	17	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\dfrac{X(p)}{p}$
7	$t.\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$	18	$\dfrac{x(t)}{t}$	$\int_p^\infty X(q)dq$
8	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	19	$x(t-\tau)$	$e^{-p\tau}X(p)$
9	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	20	$x(t)*y(t)$	$X(p).Y(p)$
10	$e^{\alpha t}.t^n$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	21	$x(t)y(0)+$ $+\int_0^t x(\tau)y'(t-\tau)d\tau$	$pX(p).Y(p)$
11	$te^{\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{(p-\alpha)^2-\omega^2}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^2}$	22	$e^{\alpha t}.x(t)$	$X(p-\alpha)$

1.5. Áp dụng để giải phương trình và hệ phương trình vi phân

Ví dụ 1. Giải bài toán Côsi

$$x''+x=t,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=1.$$

Ví dụ 2. Giải bài toán Côsi

$$x''+4x=2\cos 2t,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=4.$$

Ví dụ 3. Giải bài toán Côsi

$$\begin{cases} x'-2x-4y=\cos t, \\ y'+x+2y=\sin t, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x(0)=y(0)=0.$

Như vậy, khi $t\geq 0$, nghiệm riêng của hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} x(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t, \\ y(t) = -2(t - \sin t). \end{cases} \qquad \blacktriangleright$$

Bài tập

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:***Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978
TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

Bài giảng 12: Phép biến đổi Z

Chương II, Mục:2.1-2.4

Tiết thứ: 40-45 Tuần thứ:

- ***Mục đích, yêu cầu***:

* Tìm ảnh và gốc của biến đổi Z.

* Vận dụng giải 1 số bài tập đơn giản

- ***Hình thức tổ chức dạy học:*** Lý thuyết, thảo luận, tự học, tự nghiên cứu
- ***Thời gian:*** LT: 2t; BT: 2t, KT: 1 Tự học: 3t
- ***Địa điểm:*** Giảng đường
- ***Nội dung chính*** **Biến đổi Z**

2.1 *Định nghĩa:*

2.2 Các tính chất cơ bản về miền xác định của biến đổi Z.

Định lý (Dalamber).

Định lý (Cosi).

2.3 Biến đổi Z ngược

Ví dụ 3. Tìm biến đổi ngược của hàm $X(z) = \dfrac{z+2}{2z^2 - 7z + 3}$ trên các miền xác định của nó.

2.4 Bài tập.

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:***Nắm kiến thức cơ bản, hiểu, làm bài tập đã cho.

TL1: Phan Bá Ngọc, *Các phép biến đổi Laplace* , KHKT, 1978
TL2: Đào Bá Dương, *Hàm Phức,* HVKTQS ,1998

8. Chính sách đối với học phần và các yêu cầu khác của giáo viên

Học sinh phải tham gia đầy đủ các buổi lên lớp. Nếu số tiết lên lớp > 20% của số tiết cần tham gia, sinh viên không được dự thi cuối học phần.

Học xong lý thuyết phần nào là làm ngay bài tập phần đó. Đề bài tập được cho ngay giờ giảng đầu tiên.

Sinh viên tự giác lên bảng chữa bài tập, ai lên chữa thành công thì được giáo viên ghi nhận.

Khi không có kiểm tra giữa kỳ, sinh viên bị điểm 0 cho bài kiểm tra này.

Thi cuối kỳ 90 phút, thi viết, cấu trúc đề thi theo ngân hàng đề.

9. Phương pháp, hình thức kiểm tra - đánh giá kết quả học tập học phần

Phân chia các mục tiêu cho từng hình thức kiểm tra - đánh giá

9.1. Kiểm tra – đánh giá thường xuyên (điểm quá trình)

- Tham gia học tập trên lớp (đi học đầy đủ, chuẩn bị bài tập tốt)
- Phần tự học, tự nghiên cứu (hoàn thành tốt nội dung, nhiệm vụ mà giảng viên giao cho cá nhân/ tuần; bài tập nhóm / tháng; bài tập cá nhân/ học kì, có lên bảng chữa bài tập): Hệ số 0,1.

9.2. Kiểm tra - đánh giá định kì:

- Kiểm tra - đánh giá giữa kì: (2 đợt): Hệ số 0,2
- Thi kết thúc học phần: Hệ số 0,7

Chủ nhiệm Khoa	Chủ nhiệm Bộ môn	Giảng viên biên soạn
(Ký và ghi rõ họ tên)	*(Ký và ghi rõ họ tên)*	*(Ký và ghi rõ họ tên)*
4// Đào Thanh Tĩnh	**4// Tô Văn Ban**	**1// Phạm Tiến Dũng**