BÀI TẬP MÔN XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Bài Tập chương I

1.1. Tuổi thọ của một chiếc PC được tính từ lúc nó bắt đầu hoạt động đến khi hỏng.

a) Xác định thí nghiệm ngẫu nhiên gắn với tuổi thọ của PC

b) Không gian mẫu ở đây là gì?

c) Xác định 2 biến cố xung khắc.

d) Xác định 2 biến cố có giao khác trống.

Ans. $S = \mathbb{R}^+ = (0;\infty)$; $(0;1000)$ and (≥ 2000); $(0;\ 1000)$ and $(900;\ 2000)$.

1.2.* Các khách hàng vẫn lui tới một chiếc máy rút tiền tự động. Họ muốn rút một lượng tiền ngẫu nhiên 50 ngàn đồng một. Hãy chỉ rõ không gian mẫu. Đây phải chăng là không gian mẫu rời rạc? Chỉ ra 3 biến cố quan tâm. Ans. $S = \{50, 100, \ldots, 10^4\}$; yes, and finite;

$(\leq 10^3)$; $(10^3;\ 5.10^3)$; $(5.10^3 \div 10^4)$ (to me!).

1.3.** Xét thí nghiệm ngẫu nhiên tung con súc sắc đơn 1 lần và đếm số dấu chấm hiện trên mặt. Giả sử rằng $P(\{6\}) = 0,3$ và tất cả các mặt khác là đồng khả năng. Tìm xác suất của biến cố $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$, and $D = A \cup (B \cap C)$. Ans. 0.58; 0.28; 0.56; 0.44.

1.4. Let $P(A) = 0.9$; $P(B) = 0.8$. Chứng tỏ rằng $P(A \cap B) \geq 0.7$.

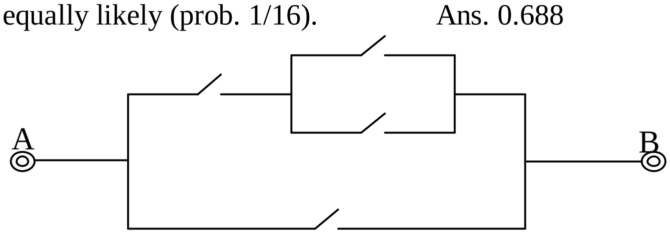
1.5.* Cho $P(A) = 0.9$, $P(B) = 0.8$; $P(A \cap B) = 0.75$, tìm (a) $P(A \cup B)$; (b) $P(A - B)$; (c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Ans. 0.95; 0.15; 0.05.

1.6. Chứng minh bất đẳng thức Boole $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} (A_i)$.

1.7.** Xét một mạch điện như hình vẽ. Các công tắc đóng hoặc mở với khả năng như nhau. Tìm xác suất để có ít ra một đường dẫn giữa 2 đầu nối A và B.

Hint. $S = \{(i, j, k, l);\ i, j, k, l = 0,1\}$. Then S contains $2^4 = 16$ points.

They are equally likely (prob. 1/16). Ans. 0.688



1.8. Chúng ta đặt ngẫu nhiên n hạt (phân tử) vào m > n hộp. Tìm xác suất P để các hạt được tìm thấy ở n hộp chọn trước (mỗi hạt chỉ ở trong 1 hộp). Xét các trường hợp sau:

(a) M–B (Maxwell-Boltzmann) – các hạt coi là khác nhau; tất cả các khả năng đều có thể được, (b) B–E (Bose-Einstein) – Không thể phân biệt được các hạt, tất cả các khả năng đều có thể được, (c) F–D (Fermi-Dirac) – Không thể phân biệt được các hạt, một hộp chứa nhiều nhất 1 hạt.

Ans. $\frac{n!}{m^n}$; $\frac{n!(m-1)!}{(m+n-1)!}$; $\frac{n!(m-n)!}{m!}$.

1.9*. Một thí nghiệm ngẫu nhiên có không gian mẫu $S=\{a,b,c\}$. Giả sử rằng $P\{a,c\}=0.75$ và $P\{b,c\}=0.6$. Tím xác suất của các biến cố sơ cấp. ĐS. $P(a)=0.4$, $P(b)=0.25$, $P(c)=0.35$.

1.10*. Giả sử có m sinh viên sinh năm 1990 đang tham dự giờ giảng. Tìm xác suất ít ra có 2 sinh viên trùng ngày sinh và chứng tỏ rằng $p>1/2$ khi $m=23$. ĐS. $1-(365)!/\{(365-m)!365^m\}$.

1.11. Khi chơi bài xì, bạn được chia ngẫu nhiên 5 quân bài. Với quy ước rằng quân át có thể được coi là cao hoặc thấp, chỉ ra rằng:

$P\{1\text{ pair}\}\simeq 0,423$; $P\{2\text{ pair}\}\simeq 0,0475$; $P\{3\text{ of kind}\}\simeq 0,021$;
$P\{4\text{ of kind}\}\simeq 0,00024$; $P\{\text{straight}\}\simeq 0,0039$; $P\{\text{full house}\}\simeq 0,0014$.

Hint. $C_{13}^1 C_4^3 C_{12}^3 (C_4^1)^3$; $C_{13}^2 (C_4^2)^2 C_{11}^1 C_4^1$; $C_{13}^1 C_4^3 C_{12}^2 (C_4^1)^2$
$C_{13}^1 C_4^3 C_{12}^1 (C_4^2)$; $10(C_4^1)^5-10C_4^1$; $C_4^1 C_{13}^5$.

1.12.** (Một) Tàu hỏa và xe bus tới ga tại một thời điểm ngẫu nhiên từ 9 đến 10 giờ. Tàu dừng trong 10 phút còn xe bus dừng a phút. Tìm a để xác suất xe khách và tàu hỏa gặp nhau bằng 0,5.

Hint. Let s and t be the moment that the train and the bus arrive, respectively. They meet iff (if and only if) $[s;s+10]\cap[t;t+a]\neq\varnothing$. Ans. $60-\sqrt{1100}$ Min.

1.13. Có 2 đồng tiền, một cân đối, một có 2 mặt sấp. Rút ngẫu nhiên 1 đồng tiền, tung nó 2 lần và đều hiện mặt sấp. Tím xác suất đồng tiền rút được là đồng tiền cân đối. Ans. 1/5

1.14. Chứng tỏ rằng $P(A|B)$ theo (1.2.1) thỏa mãn 3 tiên đề của xác suất, đó là:

a) $P(A|B)\geq 0$; b) $P(S|B)=1$;

c) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$ if $A_1\cap A_2=\varnothing$.

1.15*. Chứng minh rằng nếu $P(A|B)>P(A)$ thì $P(B|A)>P(B)$.

1.16. Chứng minh rằng nếu $P(A)>P(B)$ thì $P(A|B)>P(B|A)$.

Hướng dẫn: Dùng ĐN xác suất điều kiện.

1.17.** Xét thí nghiệm tung 2 con súc sắc cân đối. Biết rằng tổng không vượt quá 3.

a) Tìm xác suất biến cố 2 mặt giống nhau khi không biết thông tin đã nêu.

b) Tìm xác suất của biến cố trên với thông tin đã cho. Ans. $1/6$; $1/3$.

1.18.** Hai nhà máy sản xuất những linh kiện giống nhau. Nhà máy 1 sản xuất 1000 linh kiện, 100 trong đó là hỏng. Nhà máy 2 sản xuất 2000 linh kiện, trong đó có 150 là hỏng. Chọn ngẫu nhiên 1 linh kiện và thấy rằng nó bị hỏng. Tìm xác suất nó do nhà máy 1 sản xuất. ĐS 0,4.

1.19. Lô hàng 100 chip bán dẫn có chứa 20 chíp bị hỏng. Chọn ngẫu nhiên 2 chiếc không lặp lại.

a) Xác suất chiếc thứ nhất bị hỏng là bao nhiêu?

b) Xác suất chiếc thứ 2 bị hỏng biết rằng chiếc thứ nhất bị hỏng?

c) Xác suất để cả 2 chiếc đều bị hỏng? Ans. 0.2; 0.192; 0.0384.

1.20*. Hộp 1 gồm 1000 bóng đèn trong đó 10%bị hỏng. Hộp 2 gồm 2000 bóng trong đó 5% bị hỏng. Hai bóng được rút ra từ một hộp được chọn ngẫu nhiên.

a) Tìm xác suất cả hai bóng đều bị hỏng.

b) Giả sử rằng cả 2 bóng đều bị hỏng, tìm xác suất để chúng được rút từ hộp 1; tìm xác suất để chiếc bóng tiếp theo rút từ hộp đã chọn là bóng hỏng.

Hint. $A =$ {two picked bulbs are from the box 1}, $C_i =$ {the ith bulb is defective}. Ans. 0.005; 0.661; 0.081

1.21.** Giả sử rằng bằng xét nghiệm để phát hiện một loại bệnh người ta thu được kết quả sau đây. Đặt A = biến cố người kiểm tra có bệnh

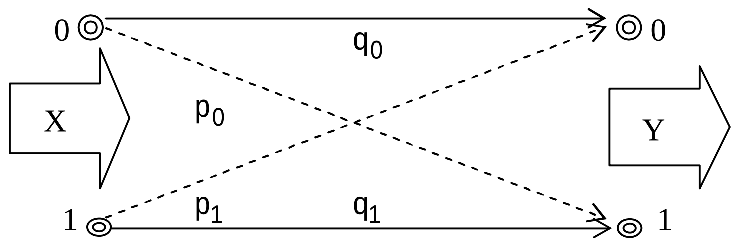
B = biến cố kết quả kiểm tra là dương tính.

Biết rằng $P(B|A) = 0.99$; $P(B|\overline{A}) = 0.005$ và 0.1 % dân số bị bệnh này. Tính xác suất một người bị bệnh biết rằng kết quả kiểm tra là dương tính. Ans. 0.165.

1.22*. Xét kênh thông tin nhị phân. Đầu vào X của kênh được xem như ở 2 trạng thái 0 hoặc 1. Do có nhiễu kênh truyền, đầu ra 0 có thê rứng với đầu vào 1 và ngược lại. Kênh được đặc trương bởi xác suất truyền kênh p_0, q_0, p_1, q_1, xác định theo

$$p_0 = P(y_1|x_0), p_1 = P(y_0|x_1), q_0 = P(y_0|x_0) \text{and } q_1 = P(y_1|x_1),$$

trong đó x_0 và x_1 ký hiệu biến cố (X = 0) và (X = 1), tương ứng; y_0 và y_1 ký hiệu biến cố $(Y = 0)$ và $(Y = 1)$ tương ứng. Chú ý $p_0 + q_0 = 1 = p_1 + q_1$. Đặt $P(x_0) = 0.5$, $p_0 = 0.1$, và $p_1 = 0.2$.



a) Tìm $P(y_0)$ và $P(y_1)$.

b) Nếu thấy 0 ở đầu ra, xác suất để 0 (đã) là trạng thái của đầu vào?

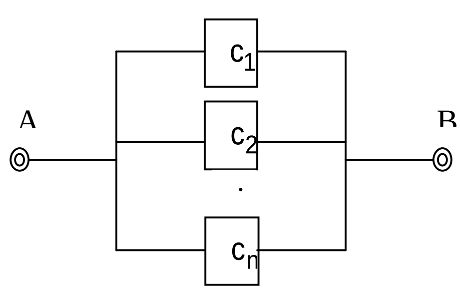
c) Nếu thấy 1 ở đầu ra, xác suất để 1 (đã) là trạng thái của đầu vào?

d) Tính xác suất sai lầm P_e. Ans. 0.55, 0.45; 0.818; 0.889; 0.15.

1.23*. Bao nhiêu phương trình bạn cần để thiết lập tính độc lập của 5 biến cố? Ans. 65.

1.24. Giả sử $S = [0;1] \times [0;1]$. Cho rằng P(A) bằng diện tích A. Tìm 2 biến cố độc lập A, B mà không có dạng chữ nhật.

1.25.** Một hệ thống các thành phần riêng rẽ xem như một hệ song song nếu nó hoạt động khi ít nhất một thành phần hoạt động. Giả sử các thành phần hỏng hóc một cách độc lập và xác suất hỏng của thành phần thứ i là p_i, $i = 1, 2, ..., n$. Tìm xác suất để hệ hoạt động. Ans. $1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$



1.26.** Giả sử S là không gian mẫu các thí nghiệm và $S=\{A,B,C\}$, $P(A)=p, P(B)=q$, và $P(C)=r$, với $p,q,r>0$. Lặp lại thí nghiệm vô hạn lần và giả sử rằng các thí nghiệm thành công là độc lập. Tìm xác suất để biến cố A xảy ra ít nhất 1 lần sau thí nghiệm thứ n rồi sau đó tìm xác suất của biến cố A xảy ra trước biến cố B. Ans. 1, $P(A)/[P(A)+P(B)]$.

Bài tập chương II

2.1.** Một nguồn thông tin sinh ra các ký hiệu gồm 4 chữ cái $\{a, b, c, d\}$ một cách ngẫu nhiên với xác suất $P(a)=1/2,\quad P(b)=1/4,\quad P(c)=P(d)\ =1/8$. Một lược đồ mã mã hóa các ký hiệu này thành mã nhị phân như sau:

$$a\sim 0 \qquad b\sim 10 \qquad c\sim 110 \qquad d\sim 111$$

Gọi X là BNN ký hiệu độ dài của mã, đó là số ký hiệu nhị thức (số bit). Tập giá trị của X là gì? Giả sử việc sinh ký hiệu là độc lập, tính các xác suất $P(X=1),\ P(X=2),\ P(X=3),\ P(X>3)$.

. Ans. $\{1, 2, 3\};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0.$

2.2*. Xét thí nghiệm ném phi tiêu vào một cái đĩa hình tròn bán kính đơn vị. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ khoảng cách từ điểm phi tiêu chạm vào đĩa tới tâm của đĩa. Giả sử phi tiêu luôn rơi vào đĩa và chạm vào mọi điểm của đĩa với khả năng như nhau.

Tìm $P(X<a)$ và $P(a<X<b),\ (a<b\le 1)$. Ans. $a^2;\ b^2-a^2$

2.3*. a) Chứng tỏ rằng hàm p(x) xác định bởi

$$p(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^x & x=0,1,2,...\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

là hàm khối lượng xác suất (pmf) của BNN rời rạc X .

b) Tìm (i) $P(X=2)$, (ii) $P(X\le 2)$, (iii) $P(X\ge 1)$. Ans. $\frac{3}{64};\frac{63}{64};\frac{1}{4}.$

2.4.** Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{(x^2+x-a)},\quad -\infty<x<\infty$.

Tìm giá trị của a sao cho f(x) là hàm mật độ (pdf) của BNN liên tục X. Ans. $a=1/4$.

2.5. BNN X được gọi là có phân bố Rayleigh nếu hàm mật độ của nó cho bởi $f_X(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}u(x).$

a) Tìm hàm phân bố (cdf) $F_X(x)$.

b) Vẽ $f_X(x)$ và $F_X(x)$ với $\sigma = 1$.

Ans. $F_X(x)=1-e^{-x^2/(2\sigma^2)};\ f_X(x)=xe^{-x^2/2}u(x).$

2.6.** Xét BNN chuẩn X với các tham số $\mu=-1,\ \sigma^2=4$. Viết ra hàm mật độ của X và tính các xác suất $P(X\ge 0),\ P(X<-0.5),\ P(|X|\le 2).$ Ans. 0.3085, 0.5987, 0.6247.

2.7*. Số cuộc gọi đến 1 tổng đài trong 10 phút là BNN X với phân bố Poisson với $\lambda = 2$.

a) Tìm xác suất có quá 3 cuộc gọi đến trong vòng 10 phút.

b) Tìm xác suất không có cuộc gọi đến nào trong vòng 10 phút. Ans. 0.143; 0.135.

2.8*. Một dây chuyền sản xuất điện trở 1000-ohm (Ω) được phép xe dịch 10% . Ký hiệu X là trị số của điện trở. Giả sử X có phân bố chuẩn với trung bình 1000 và phương sai 2500, tìm xác suất một chiếc điện trở chọn ngẫu nhiên bị loại bỏ. Ans. 0.045.

2.9. Trong việc sản xuất chíp nhớ máy tính, công ty A sản suất 1 chiếc hỏng với cỡ 9 chiếc tốt. Giả sử X là thời gian đến hỏng (theo tháng) của các chíp. Biết rằng X là BNN mũ với tham số $\lambda = 1/2$ đối với chíp hỏng và $\lambda = 1/10$ với chiếc chíp tốt. Tìm xác suất để 1 chiếc được chọn ngẫu nhiên sẽ bị hỏng (a) sau sáu tháng sử dụng; (b) một năm sử dụng. Ans. 0.501;0.729.

2.10. Độ lệch (theo mét) của điểm tiếp đất của vận động viên nhảy dù tới tâm vùng mục tiêu là BNN X có phân bố Rayleigh RV với tham số σ^2 = 100.

a) Tìm xác suất để vận động viên nhảy dù tiếp đất trong vòng bán kính r = 10m từ tâm vùng mục tiêu.

b) Tìm bán kính r sao cho xác suất để $X > r$ bằng $e^{-1}(\approx 0.368)$.

Ans. 0.393; 14.142 (m)

2.11.** Biết rằng các đĩa nhạc sản suất bởi công ty A sẽ bị hỏng với xác suất 0,01. Công ty bán đĩa thành lố 10 chiếc một với lời đảm bảo là sẽ thay cả lố nếu có quá 1 đĩa bị hỏng. Tìm xác suất để một lố được rút ra bị thay thế. Ans. 0.004.

2.12. Gọi X là BNN chỉ đầu ra khi rút một con súc sắc cân đối. Tìm kỳ vọng (giá trị trung bình) và phương sai của X. Ans. 3.5; 35/12.

2.13*. Gọi X là BNN phân bố mũ tham số λ. Kiểm tra rằng,

$E[X] = 1/\lambda$ và $V[X] = 1/\lambda^2$.

2.14.** Xét dãy các phép thử Bernoulli với xác suất thành công p. Dãy này được quan sát đến lần thử thành công đầu tiên. Giả sử BNN X ký hiệu số lần thử thành công đầu tiên. Khi đó, hàm khối lượng xác suất (pmf) của X cho bởi

$$p_X(k) = P(X = k) = (1-p)^{k-1}p,\ k = 1, 2, ...$$

Bởi vì cần phải có k – 1 thất bại trước lần thử thành công X đầu tiên. BNN X được gọi là BNN có phân bố hình học với tham số p.

a) Chứng tỏ rằng $p_X(k)$ thỏa mãn phương trình $\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = 1$.

b) Tìm hàm phân bố cdf $F_X(x)$ của X.

c) Tìm kỳ vọng E[X] và phương sai V[X].

Ans. $1-(1-p)^i,\ i \le x < i+1 \in = 1, 2, ...;\ 1/p; (1-p)/p$.

2.15.** Xét BNN mũ X với tham số λ. Chỉ ra rằng BNN X có tính chất không có trí nhớ, chính là: Với mọi c, d > 0,

$$P[X > c + d | X > d] = P(X > c).$$

2.16. Giả sử hàm mật độ của BNN X cho bởi $f_X(x) = kxe^{-x}u(x)$.

a) Tìm hằng số k k, Mod[X]. b) Tìm $E[X],\ E[X^2],\ V[X]$.

c) Tìm hàm mật độ của BNN $\sqrt{X}$.

Ans. $k=1$; $\mathrm{Mod}[X]=1$; 2; 6; 2; $f_{\sqrt{X}}(x)=2x^3e^{-x^2}u(x)$.

2.17. Tìm kỳ vọng và phương sai của BNN Rayleigh (see Prob. 2.5).

$$\text{Ans. } E(X)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma;\; V[X]=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2\approx 0.429\sigma^2$$

2.18.** Biếtrằng X là BNN với phân bố Poisson và $p_X(0)=0.0498$.

Tính E[X] và $P(X\ge 3)$. Ans. 3; 0.5767.

2.19. BNN X là BNN Pareto với các tham số a, b $(a,b>0)$ nếu hàm mật độ của nó cho bởi $f_X(x)=(a/b)\,(b/x)^{a+1}$, $x\in[b;\ \infty)$.

a) Chỉ ra rằng $E[X^n]$ tồn tại nếu và chỉ nếu $n<a$.

b) Tìm $E[X]$ và $E[X^2]$ (a > 2).

2.20*. Chỉ ra rằng đối với BNN Cauchy tham số a, b với mật độ pdf

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{(x-a)^2+b^2},\ x\in\mathbb{R}\quad (b>0),$$

kỳ vọng không tồn tại.

2.21. Giả sử $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, tính $E[X^3]$.

2.22. Giả sử rằng $Z\sim N(0,1)$.

a) Tính $E|Z|$. b) Chỉ ra rằng $E[Z^{2n}]=1.3...(2n-1)$.

2.23.** (Định lý xác suất toàn phần với kỳ vọng). Xét BNN X trên không gian mẫu S. Xét phép phân hoạch $\{B_1,...,B_n\}$ của S. Xác định

$$E(X|B_k)=\int_{-\infty}^{\infty}x f_X(x|B_k)dx,\quad k=1,2,...,n.$$

trong đó $f_X(x\,|\,B_k)=E(X|B_k)=\int_{-\infty}^{\infty}x f_X(x|B_k)dx,\quad k=1,2,...,n.$

Chỉ ra rằng $E[X]=E(X|B_1)P(B_1)+...+E(X|B_n)P(B_n)$.

2.24. Xét BNN nguyên, không âm X. Chứng tỏ rằng

$$E[X]=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k).$$

2.25. Giả sử X là BNN Poison với tham số λ. Tìm $\mathrm{Mod}[X]$ khi $\lambda>1$ và khi $\lambda<1$.

$$\text{Ans. } 0<\lambda<1:\mathrm{Mod}[X]=0;\ \lambda>1:\mathrm{Mod}[X]=\begin{cases}[\lambda], & \lambda\notin\{2,3,...\}\\ \lambda-1 \text{ and } \lambda, & \text{otherwise}\end{cases}$$

2.26*. *Bài toán chọn phiếu thăm trúng thưởng.* Có m dạng phiếu khác nhau, và mỗi lần rút 1 trong các loại này với khả năng như nhau. Gọi X là số phiếu cần chọn để có ít nhất một phiếu mỗi loại. Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

HD. Ký hiệu $X_1 = 1$, X_i - số phiếu thêm vào cần thiết để sau khi có i dạng khác nhau, cần cần phải chọn thêm cho tới khi nhận được dạng mới. Đặt $X = \sum_{i=0}^{m-1} X_i$. X_i là BNN hình học với tham số (m-i)/m; chúng độc lập. Ans. $E[X] = m\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i} \approx m\ln(m)$; $V[X] = m\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{(m-1)^2} \approx m^2\pi^2/6$.

2.27.** Chu kỳ của đèn hiệu giao thông là 2 phút xanh theo sau 3 phút đỏ. Tính thời gian chờ trung bình của chuyến đi nếu bạn đến ngã tư tại một thời điểm ngẫu nhiên phân bố đều trong khoảng thời gian 5 phút.

Hint. X – Thời gian chờ, T –thời điểm bạn đến ngã tư.

$0 \le T < 2$: $X = 0$; $2 \le T \le 5$: $X = 5 - T$. Sử dụng Bài tập 2.23 . Ans 0.9.

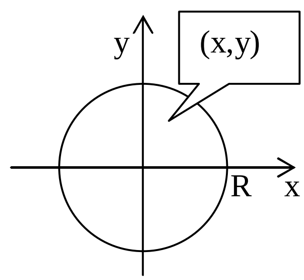
Bài tập chương III

3.1*. Xét hàm
$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-(x+y)} & 0 \le x < \infty, 0 \le y < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hàm này có thể là hàm phân bố của VTNN (cdf) (X, Y) hay không? Ans. No

3.2. Giả sử ta chọn 1 điểm ngẫu nhiên trên hình tròn bán kính R. Nếu ký hiệu tâm vòng tròn là gốc tọa độ và X và Y là tọa độ của điểm chọn, khi đó (X,Y) là VTNN với hàm mật độ xác suất (pdf) cho bởi

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} k, & x^2 + y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$



trong đó k là hằng số.

a) Xác định giá trị của k.

b) Tìm hàm mật độ biên của X và Y.

c) Tìm xác suất mà khoảng cách từ gốc đến điểm chọn không vượt quá a

Ans. $k = 1/(\pi R^2)$; $f_X(x) = \begin{cases} 2\sqrt{R^2 - x^2}/(\pi R^2), & |x| \le R \\ 0, & |x| > R \end{cases}$; a^2/R^2.

3.3.** Nhà sản suất dùng 2 quy trình sản xuất khác nhau để sản xuất chíp nhớ máy tính. Giả sử (X,Y) là VTNN trong đó X ký hiệu thời gian đến hỏng của chíp sản suất bởi quy trình A và Y là thời gian đến hỏng của chíp sản xuất bởi quy trình B. Giả sử hàm mật độ của (X,Y) là

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} abe^{-(ax+by)}, & x > 0, y > 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

trong đó $a = 10^{-4}$ và $b = 1.2(10^{-4})$, tính P(X > Y).

Ans. $b/(a+b) = 0.545$

3.4*. Giả sử (X, Y) là VTNN, trong đó X là BNN phân bố đều trên (0; 0.2) và Y là BNN mũ với tham số 5, X và Y độc lập.

a) Tìm mật độ của (X, Y). b) Tìm P(Y ≤ X).

Ans. $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 25e^{-5y}, & 0 < x < 0.2,\ y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$; $e^{-1} \approx 0.368$.

3.5. Giả sử mật độ của (X, Y) cho bởi

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng $f_{XY}(x,y)$ thỏa mãn phương trình $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=1$.

b)Tìm mật độ biên của X và Y.

Ans. e^{-x}, $(x>0)$; $1/(y+1)^2$, $(y>0)$.

3.6.** Hàm phân bố của VTNN (X,Y) cho bởi

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases} \left(1-e^{-\alpha x}\right)\left(1-e^{-\beta x}\right), & x\ge 0,\ y\ge 0,\ \beta>0 \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

a) Tìm hàm phân bố biên của X và Y.

b) Chứng tỏ rằng X và Y là độc lập.

c) Tìm $P(X\le 1, Y\le 1)$, và $P(X>x, Y>y)$.

Ans. $\begin{cases} 1-e^{-\alpha x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$; $\begin{cases} 1-e^{-\alpha y}, & y\ge 0 \\ 0, & y<0\end{cases}$;

$(1-e^{-\alpha})(1-e^{-\beta})$; $(1-e^{-\alpha x})\,(1-e^{-\alpha y})$.

3.7. Xét kênh thông tin nhị phân như trên Hình của BT 1.22. Giả sử (X,Y) là VTNN trong đó X là đầu vào kênh và Y là đầu ra của kênh. Giả sử

$P(X=0)=0.5$, $P(Y=1|X=0)=0.1$, and $P(Y=0|X=1)=0.2$.

a) Tìm hàm khối lượng xác suất (pmf) của (X, Y).

b) Tìm hàm khối lượng xác suất biên của X và Y.

c) Phải chăng X và Y độc lập?

Ans. $p_{XY}(0,0)=0.45$; $p_{XY}(0,1)=0.05$; $p_{XY}(1,0)=0.1$; $p_{XY}(1,1)=0.4$;

$p_X(0)=p_X(1)=0.5$; $p_Y(0)=0.55$, $p_Y(1)=0.45$; yes.

3.8.** Hàm phân bố của (X, Y) cho bởi

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases} k(x+y), & 0<x<2, 0<y<2 \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\quad \text{(k là hằng số).}$$

a) Tìm k. b) Tìm mật độ biên của X và Y.

c) X và Y là độc lập? Ans. $k=1/8$; $f_X(x)=\begin{cases} (x+1)/4, & 0<x<2 \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$; no.

3.9*. Cho (X,Y) là VTNN. Chứng tỏ rằng

$$\left[E(XY)\right]^2\le E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right).$$

Đây là BĐT Cauchy-Schwarz. Hint. $E[(X-aY)^2]\ge 0$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

3.10. Hàm mật độ của VTNN (X, Y) cho bởi

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} k\,xy, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

trong đó k là hằng số..

a) Tìm giá trị k.

b) Phải chăng X và Y là độc lập? Ans. 8; no.

3.11*. Xét VTNN (X,Y) ở BT 3.8.

a) Tìm mật độ điều kiện pdf $f_{Y|X}(y|x)$ và $f_{X|Y}(x|y)$.

b) Tính $P\left(0<Y<\frac{1}{2}\,|\,X=1\right)$.

Ans. $f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{2}\frac{x+y}{x+1}$, $0<x<2,\ 0<y<2$; 5/32.

3.12. Hàm mật độ của VTNN (X,Y) cho bởi

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{y}e^{-x/y}e^{-y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng $f_{XY}(x,y)$ thỏa mãn PT $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=1$.

b) Tìm $P(X>1|Y=y)$. Ans. $e^{-1/y}$

3.13. Giả sử VTNN (X, Y) phân bố đều trên hình tròn đơn vị (xem BT 3.2).

a) X và Y là độc lập?

b) X và Y là tương quan? Ans. No, no.

3.14. Giả sử (X, Y) là VTNN với hàm mật độ $f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 2, & 0<y\le x<1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

a) Tìm mật độ biên của X và Y.

b) Tính trung bình điều kiện $E(Y|x)$ và $E(X|y)$.

Ans. $f_X(x)=2x,\ (0<x<1)$; $f_Y(y)=2(1-y),\ (0<y<1)$;

$x/2,\ (0<x<1)$; $(y+1)/2,\ (0<y<1)$.

3.15. Cho (X,Y)là VTNN chuẩn.Tính $E(Y|x)$.

Ans. $\mu_X+\rho(x-\mu_X)\sigma_Y/\sigma_X$

3.16. Hàm mật độ của VTNN (X, Y)cho bởi

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

a) X và Y là độc lập?

b) Tìm mật độ điều kiện của X . Ans. Yes; $e^{-x},\ (x>0)$.

3.17. Giả sử $(X_1,...,X_n)$ là VTNN chuẩn n thành phần với hàm mật độ chỉ ra ở công thức (3.6.4). Chứng tỏ rằng, nếu X_i và X_j là tương quan không với i ≠ j, nghĩa là, $\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, khi đó $X_1,...,X_n$ là độc lập.

3.18. Hàm mật độ của (X, Y) cho bởi

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x \le y \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

a) Tìm mật độ điều kiện của Y biết rằng $X = x$.

b) Tìm hàm phân bố điều kiện của Y, biết rằng $X = x$.

Ans. $f_{Y|X}(y|x) = e^{x-y}, \quad (y \ge x); \quad F_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1 - e^{x-y}, & x \le y \\ 0, & x > y. \end{cases}$

3.19. Giả sử X và Y là 2 BNN độc lập cùng phân bố chuẩn với trung bình 0 và phương sai 4. Tìm xác suất để điểm ngẫu nhiên (X,Y) thuộc vào hình tròn tâm tại (0, 0) và bán kính 3 (m).

3.20. Lặp lại Bài tập 3.19 với $X \sim N(0,4),\ Y \sim N(0,5)$.

3.21*. Các ma trận nào sau đây là ma trận tương quan:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$? Ans. a, b.

3.22.** Giả sử (X, Y) là VTNN chuẩn với ma trận tương quan $\sum$.

a) Nếu $\sum = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, các BNN X và Y là độc lập?

b) Nếu $\sum = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, tìm hệ số tương quan giữa X và Y. Ans. Yes; 1/6.

3.23. Nếu $X \sim U(0;1)$, tìm hàm mật độ của $Y = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.

Ans. For $a > 0$: $f_Y(x) = \begin{cases} 1/|a|, & b < x < a + b \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

3.24*. BNN $X \sim N(5;2)$ và $Y = 2X + 4$. Tìm $E[Y],\ V[Y]$ và $f_Y(y)$.

3.25. BNN X có phân bố đều trên khoảng (0,1). Tìm mật độ của BNN $Y = -\ln X$.

3.26. Nếu $X \sim N(0,2)$ và $Y = 3X^2$, tìm $E[Y], V[Y]$ và $f_Y(y)$.

3.27.** Giả sử $Y = X^2$. Tìm hàm mật độ của Y nếu $X \sim N(0,1)$.

Ans. $e^{-x/2}/(\sqrt{2\pi}\,x), \quad (X^2 \sim \chi^2(1))$.

3.28. Giả sử $Y = \tan X$. Tìm hàm mật độ của Y nếu $X \sim U(-\pi/2;\ \pi/2)$.

Ans. $f_Y(x) = 1/(\pi(1 + x^2)),\ x \in \mathbb{R}$ (a Cauchy RV with parameter 1).

3.29. Chứng tỏ rằng nếu BNN X có mật độ Cauchy với $a=0;\ b=1$ (see Prob. 2.19) và $Y=\arctan X,$ khi đó Y phân bố đều trên $\left(-\pi/2,-\pi/2\right)$.

3.30. Giả sử X là BNN liên tục với mật độ $f_X\left(x\right)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & c<0. \end{cases}$

Tìm phép biến đổi Y = g(X) sao cho mật độ của Y là

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad \text{Ans. } Y=(1-e^{-X})^2.$$

3.31. Giả sử X là BNN có phân bố đều trên (0,1) và $Y=e^X$.

Tìm E[Y] bằng cách dùng $f_Y\left(y\right)$ rồi sau đó dùng $f_X\left(x\right)$. Ans. 1.

3.32. Bộ hớt ngọn tâm a được mô tả bởi ánh xạ sau đây

$$g(x)=\begin{cases} x-a, & x>a \\ 0, & |x|\le a \\ x+a, & x<-a. \end{cases}$$

a) Vẽ đồ thị hàm này với vài giá trị của a.

b) Tìm hàm phân bố và hàm mật độ of $Y=g(X)$.

c) Dạng của BNN Y là gì nếu X là BNN liên tục.

3.33.** Giả sử rằng (X,Y,Z) là VTNN chuẩn với véc tơ trung bình $\mu=(0,1,2)^T$ và ma trận tương quan $\Sigma=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm hàm mật độ của BNN $T=X-2Y+3Z$ và tính ρ_{XY}, ρ_{YZ}

$$\text{Ans. } \frac{1}{\sqrt{92\pi}}\exp\{-(x-4)^2/92\},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ 0.$$

3.34. Xét Z = X + Y. Chứng tỏ rằng nếu X và Y là những BNN Poisson độc lập với tham số λ_1 and λ_2, tương ứng thì Z cũng là BNN Poison với tham số $\lambda_1+\lambda_2$.

3.35. Giả sử rằng X và Y là những BNN chuẩn tắc độc lập . Tìm mật độ của Z = X + Y.

Ans. $Z\sim N(0,2)$.

3.36. Giả sử X và Y là nững BNN phân bố đều trên (0; 1). Tìm mật độ của Z = XY.

$$\text{Ans. } f_Z(x)=\begin{cases} -\ln x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3.37. Giả sử X và Y là những BNN chuẩn tắc độc lập. Tìm mật độ của $Z=X/Y$.

Ans. $f_Z(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},\ x\in\mathbb{R}$, BNN Cauchy.

3.38.** Giả sử X và Y là 2 BNN với hàm phân bố đồng thời $F_{XY}(x,y)$ và hàm mật độ đồng thời $f_{XY}(x,y)$. Đặt $Z=\max(X,Y)$.

a) Tìm hàm phân bố của Z.

b) Tìm hàm mật độ của Z nếu X và Y độc lập.

Ans. $F_Z(x)=F_{XY}(x,x)$; $f_Z(x)=f_X(x)F_Y(x)+F_X(x)f_Y(x)$.

3.39. Một hiệu điện thế V là hàm của thời gian t và cho bởi $V(t)=X\cos\omega t+Y\sin\omega t$ trong đó ω là tần số góc hằng số, $X=Y\sim N(0;\sigma^2)$ và chúng độc lập.

a) Chứng tỏ rằng V(t) có thể viết được dưới dạng $V(t)=R\cos(\omega t-\Theta)$.

b) Tìm hàm phân bố của BNN R và chứng tỏ rằng R và Θ độc lập.

Ans. $f_R(r)=\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-r^2/(2\sigma^2)}$, $(r>0)$ (Rayleigh RV), $f_{R\Theta}(r,\theta)=f_R(r)f_\Theta(\theta)$.

3.40. Giả sử $X_1,...,X_n$ là n BNN độc lập cùng phân bố với hàm mật độ f(x). Giả sử $W=\min(X_1,...,X_n)$. Tìm hàm mật độ của W. Ans. $f_W(x)=nf(x)[1-F(x)]^{n-1}$.

3.41. Giả sử X_1, X_2, và X_3 là những BNN chuẩn tắc độc lập. Cho
$$\begin{aligned}Y_1&=X_1+X_2+X_3\\ Y_3&=X_1-X_2\\ Y_3&=X_2-X_3\end{aligned}$$
Tìm hàm mật độ đồng thời của Y_1, Y_2 and Y_3. Ans. $\dfrac{1}{3(2\pi)^{3/2}}e^{-q(y_1,y_2,y_3)/2}$

$$q(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{y_1+2y_2+y_3}{3}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2+y_3}{3}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2-y_3}{3}\right)^2$$
$$=\frac{1}{3}y_1^2+\frac{2}{3}y_2^2+\frac{2}{3}y_3^2+\frac{2}{3}y_2y_3.$$

3.42. Giả sử X và y xác định bởi $X=\cos\Theta$, $Y=\sin\Theta$ trong đó Θ là BNN phân bố đều trên (0; 2π).

a) Chứng tỏ rằng X và Y không tương quan.

b) Chứng tỏ rằng X và y không độc lập.

Ans. $E[XY]=E[X]\,E[Y]$; $E[X^2Y^2]\neq E[X^2]\,E[Y^2]$

3.43. a) Hàm g(x) đơn điệu tăng và $Y=g(X)$. Chứng tỏ rằng

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}F_X(x), & \text{if} \quad y>g(x);\\ F_Y(y), & \text{if} \quad y<g(x).\end{cases}$$

b) Tìm $F_{XY}(x,y)$ nếu g(x) đơn điệu giảm.

3.44. Các BNN X và Y độc lập với mật độ mũ

$$f_X(x)=\alpha e^{-\alpha x}u(x);\quad f_Y(y)=\beta e^{-\beta y}u(y).$$

Tìm hàm mật độ của các BNN sau:

a) $2X+Y$; b) $X-Y$; c) $\frac{X}{Y}$; d) $\mathrm{Max}(X,Y)$; e) $\mathrm{Min}(X,Y)$.

3.45. Chứng tỏ rằng (a) tích chập của 2 mật độ chuẩn là mật độ chuẩn, và (b) Tích chập của 2 mật độ Cauchy là mật độ Cauchy.

3.46. BNN rời rạc X nhận giá trị x_n với $P\{X=x_n\}=p_n$ và BNN liên tục Y độc lập với X. Chứng tỏ rằng nếu $Z=X+Y$ và $W=XY$ thì

$$f_Z(z)=\sum_n f_Y(z-x_n)p_n; \qquad f_W(w)=\sum_n \frac{1}{|x_n|} f_Y\left(\frac{w}{x_n}\right)p_n.$$

3.47. Giả sử X là BNN với hàm mật độ $f_X(x)$. Giả sử $Y=|X|$. Tìm hàm mật độ của Y qua $f_X(x)$. Ans. $f_Y(x)=\begin{cases} f_X(x)+f_X(-x), & x>0 \\ 0, & x<0. \end{cases}$

3.48*. Cho $Y=\sin X$, trong đó X có phân bố đều trên (0; 2π). Tìm hàm mật độ của Y.

Ans. $f_Y(y)=\begin{cases} 1/(\pi\sqrt{1-y^2}), & -1<y<1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

3.49. Xét thí nghiệm tung đồng tiền cân đối 1000 lần. Tìm xác suất nhận được quá 520 mặt sấp (a) dùng công thức (3.7.10), (b) dùng công thức (3.7.12). Ans. 0.1038; 0.0974.

3.50. Số xe con đến một bãi đậu xe có phân bố Poisson với vận tốc 100 xe trên giờ. Tìm thời gian cần thiết để có quá 200 xe vào bãi đậu với xác suất 0,90 a) dùng công thức (3.7.6);

b) dùng công thức $P(Y\le x)\approx\Phi\left(\frac{x+1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Ans. (a) 2.189h; (b) 2.195h.

3.51. Một hệ truyền số có xác suất sai lầm 10^{-6} trên 1 ký hiệu. Tìm xác suất có ít nhất 3 sai lầm trong 10^6 ký hiệu bằng cách dùng công thức xấp sỉ Poisson. Ans. 0.08.

3.52. Xác suất để lái xe gặp nạn trong 1 tháng là 0.02. Tìm xác suất để trong100 tháng anh ta có 3 tai nạn. Ans. About $4e^{-2}/3$.

3.53. Tung đồng tiền cân đối n lần. Tìm n sao cho xác suất số lần sấp nằm giữa 0.49n và 0.52n ít nhất bằng 0.9.

Hint. $\Phi\left(0.04\sqrt{n}\right)+\Phi\left(0.02\sqrt{n}\right)\ge 1.9$; hence $n>4556$.

3.54. Xét dãy các phép thử Bernoulli với xác suất thành công 0,6. Giả sử k là số thành công trong n phép thử.

a) Chứng tỏ rằng $P(560\le k\le 640)=0.99$ for $n=1000$.

b) Tìm n sao cho $P(0.59n\le k\le 0.61n)=0.95$.

Ans. $2.\Phi_0(2.582)$; 2213.

3.55. Tung đồng tiền cân đối n lần một cách độc lập. Gọi S_n là số mặt sấp nhận được. Dùng bất đẳng thức Chebyshev để tìm cận dưới của xác suất để S_n/n khác với 1/2 ít hơn 0.1 khi a) $n=100$, b) $n=10000$. Hint. $P\{|S_n/n-1/2|<0.1\}\ge 1-1/(4n(0.1)^2)$.

Bài tập chương IV

4.1*. Hãng sản xuất khí đã nghiên cứu thời gian đánh lửa khởi động lạnh của động cơ ô tô. Khi thử với một chiếc xe tải, người ta thu được các số liệu sau (đơn vị: giây)

1.70, 1.92, 2.62, 2.45, 3.09, 3.15, 2.53, 1.19.

a) Tính trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu.

b) Xây dựng đồ thị dạng hình hộp của dữ liệu.

4.2. Hình thức thứ hai của sự đánh lửa được thử với cùng chiếc xe tải và thu được số liệu thời gian như sau: 1.80, 1.99, 3.13, 3.29, 2.75, 2.87, 3.40, 2.46, 1.89, 3.35. Sử dụng số liệu này cùng với số liệu ở bài tập trên về thời gian xuất phát lạnh để xây dựng đồ thị so sánh dạng hình hộp. Viết ra một mô tả về thông tin mà bạn thấy được từ các đồ thị này.

4.3. Giả sử ta có mẫu $x_1,\ldots,x_n$ và ta đã tính được $\overline{x}_n$ và $\tilde{s}_n^2$ cho mẫu này. Bây giờ ta có tiếp quan sát thứ n+1. Giả sử $\overline{x}_{n+1}$ và $\tilde{S}_{n+1}^2$ là trung bình mẫu và phương sai mẫu hiệu chỉnh cho mẫu sử dụng tất cả n + 1 quan sát.

a) $\overline{x}_{n+1}$ có thể được tính như thế nào khi sử dụng $\overline{x}_n$ và x_{n+1}.

b) Chỉ ra rằng $n\tilde{s}_{n+1}^2 = (n-1)\tilde{s}_n^2 + \dfrac{n\left(x_{n+1}-\overline{x}_n\right)^2}{n+1}$

4.4*. Giả sử ta có mẫu ngẫu nhiên kích thước 2n từ tổng thể ký hiệu là X và $E(X)=\mu,\ V(X)=\sigma^2$. Đặt $\overline{X}_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ và $\overline{X}_2 = \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$ là 2 ƯL của μ. ƯL nào là tốt hơn? Giải thích.

4.5.** Giả sử $X_1, X_2, ..., X_6$ là mẫu ngẫu nhiên từ tổng thể với trung bình μ và phương sai σ^2. Xét các ƯL sau của μ

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_6}{6},\ \hat{\theta}_2 = \frac{4X_1 - 2X_6 + X_4}{3}$$

a) Phải chăng cả hai ƯL đều là không chệch?

b) ƯL nào là tốt nhất, theo nghĩa nào?

4.6*. Lực kéo của bộ truyền trong động cơ ôtô như sau

79.3, 75.1, 78.2, 74.1, 73.9, 75.0, 77.6, 77.3, 73.8, 74.6, 75.5, 74.0,

75.9, 72.9, 73.8, 74.2, 78.1, 75.4, 76.3, 75.3, 76.2, 74.9, 78.0, 75.1,

a) Tính ƯL điểm của lực kéo trung bình của tất cả các bộ liên kết trong tổng thể. Nói rõ ƯL nào đã sử dụng và tại sao.

b) Tính ƯL điểm của một nửa số lực kéo thấp nhất.

c) Tính ƯL điểm của phương sai tổng thể và độ lệch chuẩn tổng thể.

Ans. a) $\overline{x}_D = 74.28$; b) $\overline{x} = 75.60,\ \tilde{s} = 1.6967$

4.7. $\overline{X}_n$ và $\tilde{S}_1^2$ là trung bình mẫu và phương sai điều chỉnh mẫu từ một tổng thể với trung bình μ và phương sai σ_1^2. Tương tự, $\overline{X}_2$ và $\tilde{S}_2^2$ là trung bình mẫu và phương sai điều chỉnh mẫu từ tổng thể độc lập thứ hai với trung bình μ_2 và phương sai σ_2^2. Kích thước mẫu tương ứng là n_1, n_2.

a) Chỉ ra rằng $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ là ƯL không chệch của $\mu_1 - \mu_2$.

b) Tìm độ lệch chuẩn của $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. Bạn ƯL độ lệch chuẩn này thế nào?

Ans. $\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$; $\sqrt{\tilde{S}_1^2/n_1 + \tilde{S}_2^2/n_2}$.

4.8. Giả sử X là BNN Bernoulli. Hàm khối lượng xác suất là:

$$f(x;p) = \begin{cases} p^x(1-p), & x = 0,1 \\ 0, & \text{tr¸i l¹i} \end{cases}$$

trong đó p là tham số cần ƯL.

Tìm hàm hợp lý và loga hàm hợp lý của mẫu ngẫu nhiên kích thước n.

Ans. $p^{x_1+...+x_n}(1-p)^n$, $(x_i \geq 0)$; $(x_1 + ... + x_n)\ln p + n\ln(1-p)$.

4.9. Trong trường hợp phân bố chuẩn, ƯL hợp lý cực đại của μ và σ^2 là

$$\hat{\mu} = \overline{X} \text{ và } \hat{\sigma}^2 = \Sigma_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2 / n.$$

Tìm ƯL hợp lý cực đại của hàm $h\left(\mu, \sigma^2\right) = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$.

Hướng dẫn. Thay ƯL $\hat{\mu}$ và $\hat{\sigma}^2$ vào hàm h. Ans. $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 / n}$.

4.10.** Tuổi thọ của các bóng đèn điện tử có phân bố mũ với tham số λ. Một mẫu ngẫu nhiên kích thược n được rút ra. Tìm hàm mật độ đồng thời của mẫu.

Ans. $\lambda^n e^{-\lambda(x_1+...+x_n)}$, $(x_i \geq 0)$.

4.11*. Kỹ thuật CVN đo năng lượng nén và thường được dùng để xác định một nguyên liệu có thay đổi từ dẻo sang dòn hay không khi nhiệt độ giảm dần. Phép đo năng lượng nén (J) trên những mẫu thép A238 đem cắt ở 60^0C như sau: 64.0; 65.0 ; 64.5; 64.6; 64.5; 64.0; 64,6; 64,8; và 64.3. Giả sử rằng năng lượng chịu nén có phân bố chuẩn với $\sigma = 1(J)$. Tìm khoảng tin cậy 95% cho μ - năng lượng chịu nén trung bình. Ans. $(64,478 \pm 0,653)$

4.12.** Người ta muốn ƯL khoảng tin cậy cho độ suy giảm trong một mạch của thiết bị bán dẫn. Giả sử độ suy giảm có phân bố chuẩn với $\sigma = 20$.

a) Tìm khoảng tin cậy 90% cho μ khi $n = 20$, $\overline{x} = 1000$

b) Tìm khoảng tin cậy 99% cho μ khi $n = 10$, $\overline{x} = 1000$.

Ans. (1000 ± 7.4); (1000 ± 16.3)

4.13.** Người ta lấy ngẫu nhiên 50 mẫu nước từ một hồ nước sạch và đem kiểm tra nồng độ canxi (mg/l). Khoảng tin cậy 90% cho nồng độ canxi trung bình là $0,49 \leq \mu \leq 0,82$.

a) Khoảng tin cậy 99% tính được từ mẫu nước đó là rộng ra hay hẹp lại?

b) Xét phát biểu sau đây: Có 90% cơ hội để μ nằm giữa 0,49 và 0,82. Phát biểu này có đúng không? Giải thích câu trả lời của bạn.

c) Xét phát biểu sau đây: Nếu lấy ngẫu nhiên 100 mẫu nước từ hồ và tính ra khoảng tin cậy 90% cho μ, và quá trình này lặp lại 1000 lần thì có cỡ 900 khoảng tin cậy chứa μ. Phát biểu này có đúng không? Giải thích câu trả lời của bạn. Ans. Longer, no, yes.

4.14*. Một hãng sản xuất vòng găng cho động cơ ô tô. Biết rằng đường kính vòng có phân bố chuẩn với $\sigma = 0.001$ mm. Mẫu ngẫu nhiên 15 vòng có đường kính trung bình $\overline{x} = 74.036$ mm.

a) Tìm khoảng tin cậy hai phía 99% cho đường kính vòng găng trung bình.

b) Xây dựng biên tin cậy dưới (khoảng tin cậy phải) 95% cho đường kính vòng găng trung bình. Ans. (74.036 ± 0.0007), 74.0356

4.15. Một kỹ sư về lốp nghiên cứu tuổi thọ của lốp đối với một hỗn hợp cao su mới, ông làm ra 15 chiếc và đem chúng thử nghiệm trên đường cho đến hỏng. Trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu là 60 139 và 3645 (km). Tìm khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ lốp trung bình.

Ans. (60139 ± 2018)

4.16. Độ sáng của đèn hình tivi có thể được ƯL bởi việc đo dòng đòi hỏi để thu được mức sáng nào đó. Một mẫu 10 bóng cho ta $\overline{x} = 317$ và $s = 15,5$. Tìm khoảng tin cậy 95% cho dòng trung bình đòi hỏi (mA). Phát biểu những giả thiết cần thiết về phân bố của số liệu.

Ans. (317 ± 11.1)

4.17*. Một tác giả mô tả hiệu ứng của sự phân lớp lên tần số tự nhiên của chùm tia sinh ra từ những bản composit. Năm chùm như thế được thu thập và tần số thu được tương ứng như sau (Hz) : 230.66, 233.05, 232.58, 229.48, 232.58.

Tìm khoảng tin cậy 90% hai phía của tần số tự nhiên trung bình. Có phải là bình thường hay không khi nói đến giả thiết về tính chuẩn của tổng thể? Ans. (231.67 ± 1.46)

4.18. Lượng đường của si rô trong những chiếc can có phân bố chuẩn. Mẫu ngẫu nhiên 10 can cho ra độ lệch chuẩn s = 4,8 mg. Tìm khoảng tin cậy hai phía 95% cho σ.

Ans. $(3.30; 8.76)$

4.19.** Một công ty sản xuất bóng đèn đã quảng cáo rằng bóng điện 75 W của họ đốt sáng trung bình 800 giờ trước khi hỏng. Tổ chức những người tiêu dùng cần phải quyết định xem có phạt tiền liên quan đến chiến dịch quảng cáo của công ty hay không. Vì thế họ quyết định rút thăm và kiểm tra 100 bóng đèn khiếu kiện. Với thí nghiệm này, 100 bóng đèn đốt cháy trung bình $\overline{x} = 745,1$ giờ trước khi cháy với độ lệch chuẩn mẫu $s = 238,0$ giờ. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết phù hợp cho tình huống này. Tính xác suất ý nghĩa. Phải chăng kết quả này đảm bảo bác bỏ giả thuyết tại mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$? Ans. $2.13 = z_{0.011} \Rightarrow p - \text{value} = 0.011$, yes.

4.20. Xét số liệu tuổi thọ lốp trong Bài tập 4.18. Tìm giới hạn tin cậy dưới 95% cho σ^2.

Ans. 2802^2

4.21.** Mẫu ngẫu nhiên 50 chiếc mũ xe máy đình chỉ lưu hành được đề nghị kiểm tra chất lượng và thấy có 18 chiếc có những hư hại.

Tìm khoảng tin cậy hai phía 95% của tỷ lệ thực của số mũ dạng này sẽ bị hư hại sau cuộc kiểm tra.

Sử dụng ƯL điểm của p thu được từ mẫu 50 mũ nói trên, bao nhiêu mũ cần phải được kiểm tra để với độ tin cậy 95%, sai số trong ƯL giá trị thực của p nhỏ hơn 0,02.

Ans. (0.36 ± 0.133); $n = \frac{f(1-f)}{\varepsilon_0^2} z_{\alpha/2} = 2213$

4.22. Người ta nghiên cứu tỷ lệ các mạch tích phân hỏng trong quá trình in ảnh litô. Kiểm tra mẫu 300 mạch thì thấy có 14 mạch bị hỏng. Tìm khoảng tin cậy hai phía 95% của tỷ lệ các mạch bị hỏng bởi công cụ loại này.

Ans. $(14/300 \pm 0.024)$.

4.23*. Người ta quyết định dùng máy đo độ cao laze để đo chiều cao μ của ngọn núi cao nhất trong vùng. Biết rằng các phép đo dùng máy đo độ cao laze có giá trị trung bình bằng μ và độ lệch chuẩn 1 mét. Cần phải tiến hành bao nhiêu phép đo nếu muốn xây dựng một khoảng tin cậy mức 90% cho μ với độ rộng 20cm? ĐS 270

4.24*. Nhiệt độ nước trung bình từ ống xả tháp lạnh nhà máy nhiệt điện không nên vượt quá 100^0F. Trước kia người ta thấy rằng độ lệch chuẩn của nhiệt độ nước là 2^0F. Nhiệt độ nước được đo ngẫu nhiên 9 lần ở một ngày chọn sẵn và thấy rằng nhiệt độ trung bình là 98^0F.

a) Nhiệt độ nước sẽ được chấp nhận với mức $\alpha = 0,05$?

b) P-giá trị cho kiểm định này là bao nhiêu?

4.25. Một nhà máy sản xuất trục truyền động cho động cơ ô tô. Người ta để ý đến độ mòn (0,0001 inch) của trục khuỷu sau 100 000 dặm, bởi vì đó được xem là điều quyết định cho sự bảo hành. Mẫu ngẫu nhiên 15 trục được kiểm tra và thấy $\overline{x} = 2.78$. Biết rằng $\sigma = 0.9$ và độ mòn có phân bố chuẩn.

a)** Hãy kiểm định $H_0 : \mu = 3$ / $H_0 : \mu \neq 3$ víi $\alpha = 0.05$.

b) Tìm sức mạnh của kiểm định nếu $\mu = 3.25$

Hint. $|Z| = 0.947 < z_{\alpha/2} = 1.96$; $P = 0,35$, $\beta = 1 - 0,35$

4.26. Lượng mưa (đơn vị mẫu - bước, khoảng $1233m^3$) của 20 đám mây được chọn ngẫu nhiên và có sử dụng chất kết hạt nitrat bạc là

18,0; 30,7; 19,8; 27,1; 22,3; 18,8; 31,8; 23,4; 21,2; 27,9;

31,9; 27,1; 25,0; 24.7; 26,9; 21,8; 29,2; 34,8; 26,7; 31,6.

a**) Bạn có thể chấp nhận khẳng định rằng, lượng mưa trung bình từ các đám mây có sử dụng các chất kết hạt vượt qúa 25 đơn vị hay không?

b*) Có là bình thường không khi ta coi lượng mưa từ các đám mây dùng chất kết hạt có phân bố chuẩn?

c) Tìm sức mạnh của kiểm định nếu giá trị thực của lượng mưa trung bình là 27.

Hint. a) $T = 0.9674 < 1.729 = t_{0.05}(20-1)$: no, b) yes,

c) $\beta = P\left(\frac{\left|\overline{X} - 27 + 27 - 25\right|}{\tilde{S}}\sqrt{20} < 1.729\right) \Rightarrow$ 0.1252

4.27.** Một hãng sản xuất kính liên tròng muốn đánh giá chất lượng máy mài mới và sẽ chấp nhận chất lượng của máy nếu tỉ lệ lỗi không vượt quá 2%. Mẫu ngẫu nhiên 250 kính chứa 6 kính hỏng.

Phát biểu giả thuyết để xác định máy có được đánh giá là đạt chất lượng hay không (lấy $\alpha = 0.05$). Tìm p-giá trị.

Ans. $H_0 : p = 0.02$ / $H_1 : p > 0.02$; $Z = 0.452 = z_{0.326} \Rightarrow p = 0.326$.

4.28. Tuổi thọ hiệu dụng của một bộ phận sử dụng trong động cơ máy bay turbin phản lực là BNN với trung bình 5000 giờ và độ lệch chuẩn 40 giờ. Phân bố của tuổi thọ hiệu dụng rất gần với phân bố chuẩn. Nhà sản suất giới thiệu một sự cải tiến trong quá trình sản suất thiết bị này mà đã nâng tuổi thọ trung bình lên 5050 giờ và giảm độ lệch chuẩn xuống còn 30 giờ. Giả sử mẫu ngẫu nhiên $n_1 = 16$ bộ phận được chọn từ quy trình sản suất cũ và mẫu ngẫu nhiên $n_2 = 25$ bộ phận chọn từ quy trình cải tiến. Tìm xác suất để sự khác biết giữa hai trung bình mẫu ít nhất là 25 giờ. Giả sử rằng quy trình sản xuất cũ và quy trình cải tiến có thể xem như là những tổng thể độc lập.

Hint. $Z = \overline{X} - \overline{Y} \sim N(50; 40^2/16 + 30^2/25)$; $P = P(|Z| > 25)$. Ans. 0,9838

4.29*. Hãng điện tử gia dụng so sánh độ sáng của hai loại đèn hình khác nhau sử dụng trong máy thu hình. Loại bóng A có độ sáng trung bình 100 và độ lệch chuẩn 16, trong khi đó loại bóng B có có độ sáng trung bình chưa biết nhưng có thể coi có độ lệch chuẩn giống như của loại A. Mẫu ngẫu nhiên n = 20 bóng mỗi loại được rút ra và tính $\overline{X}_B - \overline{X}_A$. Nếu μ_B bằng hay vượt quá μ_A, nhà sản suất sẽ chọn loại B đem sử dụng. Sự khác biệt là $\overline{x}_B - \overline{x}_A = 3.5$. Bạn sẽ dùng quyết định nào và tại sao?

Hint. $Z = (\overline{X} - \overline{Y}) / \sqrt{16^2/20 + 16^2/20} \sim N(0;1)$;

the hypothesis is rejected iff $Z > z_{0.05}$. Ans. No.

4.30.** Một công ty thiết bị điện nhận thấy có thể dùng được 2 dạng chất dẻo. Sức bền chịu va đập là quan trọng. Người ta biết rằng $\sigma_1 = \sigma_2 = 1,0$ psi. Từ mẫu ngẫu nhiên kích thước $n_1 = 10$ và $n_2 = 12$ người ta nhận được $\overline{x}_1 = 163$ và $\overline{x}_2 = 155$. Công ty sẽ không chọn chất dẻo 1 trừ phi sức bền chịu va đập của nó trội hơn so với của chất dẻo 2 ít nhất 10 psi. Dựa trên thông tin về mẫu, phải chăng chất 1 sẽ được đem vào sử dụng? Dùng $\alpha = 0,05$ để chấp nhận quyết định. Ans. $Z = -4.67 < -1.645$. No.

4.31*. Người ta nghiên cứu vận tốc cháy của 2 bộ đẩy dùng nhiên liệu rắn trong hệ thống thoát hiểm cho phi công. Biết rằng cả hai bộ đẩy có độ lệch chuẩn của vận tốc cháy gần như nhau, đó là $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$ cm/s. Hai mẫu ngẫu nhiên kích thước $n_1 = 20$, $n_2 = 20$ được kiểm tra, vận tốc cháy trung bình là $\overline{x}_1 = 18$ và $\overline{x}_2 = 24$ cm/s.

a) Kiểm định giả thuyết ($\alpha = 0.05$) rằng cả 2 hệ thống đẩy có cùng vận tốc cháy trung bình.

b) P-giá trị của kiểm định ở phần a) là bao nhiêu?

c) Xây dựng khoảng tin cậy 95% của sự khác biệt trung bình $\mu_1 - \mu_2$. Nêu ý nghĩa thực tế của khoảng này.

Ans. $|Z| = 6.324 = z_{0.000/2} \Rightarrow p - value = 0.000$,

$(\overline{X} - \overline{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}) = (6 \pm 1.859)$.

4.32.** Hai hãng hoá chất có thể cung cấp nguyên liệu thô. Nồng độ của loại chất nào đó trong nguyên liệu là điều quan trọng. Nồng độ trung bình của cả hai nhà cung cấp là như nhau, nhưng chúng ta ngại rằng sự bất ổn định về nồng độ có thể là khác nhau với hai nhà cung cấp. Độ lệch chuẩn của nồng độ trong mẫu ngẫu nhiên 10 lô sản xuất bởi hãng thứ nhất là $s_1 = 4,7$ g/l;

trong khi đó với hãng thứ hai, mẫu ngẫu nhiên $n_2 = 16$ lô cho ra $s_2 = 5,8$ g/l. Có đủ chứng cớ để kết luận rằng hai phương sai tổng thể là khác nhau? ($\alpha = 0.05$).

Ans. $F = 1.523 < f_{0.05}(15;9) < f_{0.025}(15;9) = f_{\alpha/2}(n_2 - 1; n_1 - 1)$. No

4.33. Hai dạng khác nhau của chất bôi trơn được xem xét để dùng cho .. mổ thay thuỷ tinh thể. 300 thủy tinh thể dùng chất bôi trơn thứ nhất và trong số đó 253 không có trục trặc gì. 300 thuỷ tinh thể khác dùng chất bôi trơn thứ hai và thấy có 196 đạt yêu cầu. Liệu có thể tin rằng hai chất bôi trơn là khác nhau hay không với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$. Xét xem vấn đề này có thể giải quyết được thông qua khoảng tin cậy của $p_1 - p_2$.

Ans. $|Z| = \dfrac{|f_1 - f_2|}{\sqrt{\bar{f}(1-\bar{f})(1/n_1 + 1/n_2)}} = 5.362 > 2.58 = z_{\alpha/2}$:yes. $0 \notin (0.19 \pm 0.09)$,

4.34*. Người ta quảng cáo cho một sản phẩm giảm béo dạng lỏng rằng sử dụng sản phẩm trong vòng 1 tháng gây ra giảm trọng lượng ít nhất 3 pound. Tám đối tượng sử dụng sản phẩm này trong vòng 1 tháng và số liệu suy giảm trọng lượng ghi lại dưới đây. Sử dụng thủ tục kiểm định giả thuyết để trả lời câu hỏi sau

1	165	161	5	155	150
2	201	195	6	143	141
3	195	192	7	150	146
4	198	193	8	187	183

a) Phải chăng số liệu là phù hợp với khẳng định của nhà sản xuất sản phẩm giảm béo với xác suất sai lầm loại I bằng 0,05.

b) Trong một nỗ lực để nâng cao mức tiêu thụ, nhà sản xuất xem xét lời đảm bảo của họ từ "ít nhất 3 pound" thành "ít nhất 5 pound". Kiểm định lời đảm bảo mới.

Hint. $T_a = 2.565 > -t_{0.05}(8-1)$, yes.

$$T_b = \frac{4.13 - 5}{1.246}\sqrt{8} = -0.6982 > -t_{0.05}(8-1), \text{ yes.}$$

4.35*. Gọi X là số vết nứt quan sát được trên một cuộn lớn thép mạ. 75 cuộn đã được khảo sát và thu được số liệu sau về các giá trị của X:

Giá trị quan sát	1	2	3	4	5	6	7	8
Tần số	1	11	8	13	11	12	10	9

Phải chăng giả thuyết rằng phân bố Poisson là mô hình xác suất cho số liệu này xem như là có lý? Dùng $\alpha = 0,01$. Tính p-giá trị cho kiểm định này.

Hint. $\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \dfrac{(n_1 - np_i)^2}{np_i} = 10.466 < \chi^2_{0.05}(7-16) < \chi^2_{0.01}(6)$: yes, $p = 0.106$

4.36. Gọi X là số chai đóng thiếu trong một thùng 24 chai. 75 thùng được kiểm tra và số liệu sau được ghi lại.

Giá trị	0	1	2	3
Tần số	39	23	12	1

a) Dựa vào 75 quan sát này, phải chăng phân bố nhị thức là mô hình có thể chấp nhận được? Tạo ra một thủ tục kiểm định phù hợp với $\alpha = 0.05$

b) Tính p-giá trị.

4.37*. Một hãng sử dụng 4 máy 3 ca mỗi ngày. Từ nhật ký sản xuất, dữ liệu sau về số sự cố được thu thập:

Ca	Máy A	Máy B	Máy C	Máy D
1	41	20	11	16

2	31	12	9	15
3	15	11	15	11

Kiểm tra giả thuyết (dùng $\alpha = 0.05$) rằng số lần hỏng hóc là độc lập với ca. Tìm p- giá trị cho kiểm định này.

Hint. $\chi^2 = 696,16 > \chi^2_{0.05}(3-1)(4-1)$, $p = 0.000$.