Факультет: ИТ

Кафедра: Высшая Математика

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
(предметный проект)

1. Наименование дисциплины: ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАЕИКИ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ
2. Число часов занятий: 60 (45 лек. + 15 прак.)
3. Содержание учебной части:

I. Предел последовательности

I.1. Определение предела последовательности

I.2.Свойства пределов

I.3. Критерий Коши

I.4. Предел монотонной последовательности. Число е

I.5. Принцип вложенных отрезков

I.6. Теорема Больцано – Вейерштрасса

II. Функция и предел функции

II.1. Понятие функции.

II.2. Сложная фукция

II.3. Обратная фукция

II.4. Два определения предела функции

II.5. Свойства пределов функции

II.6. Бесконечно малая (БМ) и бесконечно большая (ББ)

III. Непрерывность функции

III.1. Понятие непрерывности функции. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва

III.2. Непрерывность сложной фукции

III.3. Непрерывность обратной фукции
III.4. Непрерывная функция на отрезке
III.5. Замечательные пределы

IV. Производная и дифференциал

IV.1. Понятие производной функции
IV.2. Производная сложной функции
IV.3. Производная обратной функции
IV.4. Производная элементарных функций
IV.5. Дифференциал
IV.6. Производная и дифференциал высших порядков
IV.7. Основные теоремы дифференциального исчисления
IV.8. Приложения дифференциального исчисления
IV.8.1. Формула Тейлора
IV.8.2. Правила Лопиталя
IV.8.3. Исследование функций с помощью производной

a. Условия возрастания и убывания функции

b. Локальные эстремумы и наибольшие и наименьшие значения

c. Условие выпуклости и точка перегиба

d. Асимптоты

IV.8.4. Построение графика функции

V. Исследование общего уравнения второго порядка

V.1. Движения Декартовой системы координат
V.2. Общее уравнение второго порядка и его инварианты
V.3. Приведение общего уравнения второго порядка к каноническому виду
V.4. Классификация линий второго порядка

4. Литература

Пн	Наименнование литер.	Автор	Год изд.	Изд-ство	Гос-ство
1.	Лекции по М.А.	Г.И. Архипов В.А.Садовничий В.Н.Чубариков	1999	МГУ	Россия

2.	Высшая математика. Том I, II.	Бугров Я.С. Никольский С.М.	1980, 1981	Наука – Москва	Россия
3.	Сборник задач по М.А. 1.	Вьен Н.С.	2005	Лекуйдон	Вьетнам
4.	Сборник задач по курсу М.А.	Г.Н. Берман	1985	Наука – Москва	Россия
5.	Задачник	Бугров Я.С. Никольский С.М.	1982	Наука – Москва	Россия
6.	Сборник задач по АГ & ЛА	Вьен Н.С.и др.	2010	QĐND	Вьетнам
7.	Линейная Алгебра и Аналитическая Геометрия	Вьен Н.С.	2013	QĐND	Вьетнам

Конкретный лекционо-учебный план занятий

1- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

1. **Предел последовательности**
   - **1.1.** Определение предела последовательности
   - **1.2.** Свойства пределов
   - **1.3.** Критерий Коши

Действительные числа: рациональные и иррациональные числа

Обозначения: $\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

$\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел

$\mathbb{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\dots\}$

$\mathbb{Q}$ - множество всех рациональных чисел

$\mathbb{Q} = \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_*; \ \frac{m}{n} = \frac{m\prime}{n\prime} \Leftrightarrow mn' = m'n$

$\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - множество всех иррациональных чисел

$A \setminus \{0\} = A_*$- множество чисел из A без нуля;

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}_*$

Sup, inf, полнота множества действительных чисел

Интервал, отрезок, абсолютная величина.

Интервалы: (a, b)- окрытый интервал; $(a,b]$, $[a,b)$- полуокрытые интервалы; $[a, b]$- замкнутый интервал или отрезок (или сегмент).

Абсолютная величина: $|a| = \begin{cases} a \text{ если } a \geq 0 \\ -a \text{ если } a < 0 \end{cases}$

Свойства абсолютных величин:

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|ab| = |a||b|$

1.1. Предел посл-сти действительных чисел

$$lim x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \left((n \geq N) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon)\right)$$

Теоремы о пределе посл-сти действительных чисел

(необходмые условия сходимости последовательностей)

1.2. Свойства пределов

i) Последовательность имеет предел – ограничена;

ii) Последовательность имеет предел то он один;
iii) Если $x_n \leq y_n$ и $lim x_n = a, lim y_n = b$ то $a \leq b$;
iv) Если $x_n \leq z_n \leq y_n$ и $lim x_n = lim y_n = a$ то $lim z_n = a$
v) Арифметические свойства пределов

1.3. Критерий Коши

Для того чтобы последовательность (x_n) имела предел необходимо и достаточно чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall m \; \forall n \big((m \geq N) \wedge (n \geq N) \Rightarrow (|x_m - x_n| < \varepsilon) \big) \quad (1)$$

Прак.1 ч.

Упражнения: [3]:

1.3; 1.5; 1.6; 1.11; 1.13;

Слова и выражения.

2- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

1.4. Предел монотонной последовательности. Число e

Последовательность (x_n) называется **неубывающей** если $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; называется **невозрастающей** если $x_n \geq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Последовательность (x_n) называется **монотонной** если она является неубывающей или невозрастающей последовательностью.

Говорят, что последовательность (x_n) **строго монотонно возрастает** если $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; (x_n) **- строго монотонно убывает** если $x_n > x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

Критерий Коши для существования предела монотонных последователностей: *Неубывающая последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.*

Невозрастающая последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена снизу.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n -$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3.

1.5. Принцип вложенных отрезков

Пусть $\sigma_n = [a_n, b_n] n = 1,2,\ldots -$ *вложенные отрезки:* $\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \cdots \supset \sigma_n \supset \cdots$, $|\sigma_n| = (b_n - a_n) \to 0, n \to +\infty$. *Тогда существует единственное число, общее для всех* σ_n,

$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n$, *причём* $c = lim_{n\to+\infty}\, a_n = lim_{n\to+\infty}\, b_n$.

Доказательство.

1.6. Теорема Больцано – Вейерштрасса

Из всякой органиченной последовательности действительных чисел (x_n) *всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность* (x_{n_k})

Доказательство.

Прак.1 ч.

Упражнения [3]: 2.2a; 2.4; 2.28c; 2.28; 2.33; 2.34;

Слова и выражения.

3- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

2. Функция и предел функции

2.1. Понятие функции. Сложная фукция.

1. Отображение $f: A \to B; A, B \subset \mathbb{R}$ называется **функцией**, определённой на множестве A со значениями в множестве B.

Иными словами $f: A \to B; A, B \subset \mathbb{R}$ называется функцией если каждому числу $x \in A$ ставится в соовететствие единственное число $y = f(x) \in B$. $f(x) -$ называется значением функции f в точке x. Тогда говорят что функция $f(x)$, определена на множестве A со значением в B.

Пример 1. Элементарные функции: $c, x, x^{\alpha}, sinx, cosx, tgx, ctgx, \dots$

Множество $\{\Gamma = (x, y), x \in A: y = f(x)\}$ называется **графиком** функции $y = f(x)$.

Понятие образ и прообраз функции

Если $y = f(x)$ то число y называется **образом** числа x; в своей очереди число x называется **прообразом** числа y.

Множество $f^{-1}(y) = \{x \in A: y = f(x)\}$ называется полным прообразом числа $y \in B$.

Функция $f: A \to B$ называется взаимно однозначной функцией если она одновременно является функцией вложения и функцией на.

2.2. **Композиция функций** и **сложная функция**.

Пусть $f: A \to B, g: B \to C$ функции. Тогда функция $h: A \to C$, определяемая соотношением $h(a) = g\big(f(a)\big)\ \forall a \in A$ называется композицией функций f и g и обозначается $h = g \circ f$

2.3. Обратная фукция

1. Пусть $f: A \to B$ есть функция; $A, B \subset \mathbb{R}$. Функция $g: B \to A$ называется обратной для f функцией и обозначается $g = f^{-1}$ если $g\big(f(x)\big) = x\ \forall x \in A$ и $f\big(g(y)\big) = y\ \forall y \in B$.

Теорема. *Для того чтобы функция $f: A \to B$ имела обратную $f^{-1}: B \to A$ необходимо и достаточно чтобы f есть взаимно однозначная функция (или на языке отображений, f есть биекция)*

Доказательство.

2. Гиперболические функции.

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; thx = \frac{shx}{chx}; cthx = \frac{chx}{shx}$$

Основные формулы

$$sh(x+y) = shxchy + shychx \quad (1)$$
$$ch(x+y) = chxchy + shxshy \quad (2)$$
$$ch^2x - sh^2x = 1 \quad (3)$$

Прак. 1 ч.

Упражнения: [3] 2.2 b; 2.9; 2.15;

Упражнения: [5] 3.16; 3.18; 3.22.

Слова и выражения.

4- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

2.4. Два определения предела функции

Множество $\{x \in (a-\delta, a+\delta)\}$ называется δ **−окрестностью** точки a.

Множество $\{(a-\delta, a+\delta)\}\backslash\{a\}$ называется проколотой δ −окрестностью точки a.

Опр.1 (по Коши или по языку $\varepsilon - \delta$): Пусть $f(x) -$ функция, определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Говорят что $f(x)$ имеет предел числом A при $x \to a$ и пишут $\lim_{x\to a} f(x) = A$ если

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \big(0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)\big)$$

Опр.2: (по Гейне или по языку последовательностей)

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \left((lim x_n = a) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right)\right)$$

Доказательство их эквивалентности.

Понятие **предела справа**, **слева**

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a,\ \ x>a} f(x) = A$$

или по языку последовательности это означает $\forall x_n \to a, x_n > a$ имеем $f(x_n) \to A$. □

Аналогично для

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a,\ \ x<a} f(x) = A,$$

или по языку $\varepsilon - \delta$ это означает

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \big((a-\delta < x < a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\big)$$

Пример 1. Функция $f(x) = signx = \begin{cases} 1 \text{ если } x > 0 \\ 0 \text{ если } x = 0 \\ -1 \text{ если } x < 0 \end{cases}; x \in \mathbb{R}$,

называется функцией знака числа x. Легко видеть, что для любых действительных чисел $\alpha > 0, \beta < 0$

$$f(\beta) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = -1,\ \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1 = f(\alpha).$$

Пример 2. Рассмотрим функцию целой части $f(x) = [x]$ числа $x \in \mathbb{R}$, которая определяется следующим образом

$$[x] \le x < [x] + 1,$$

$[x]$ - есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x. Например, $[1{,}2] = 1$ а $[-(1{,}2)] = -2$. Очевидно, что для любого целого $m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to m-0} [x] = m - 1, \lim_{x \to m+0} [x] = m.$$

2.5. Свойства пределов функции

1. Функция, имеющая предел при $x \to a$ - органичена в окрестности точке a;
2. Функция имеет предел то он один;
3. Если $f(x) \leq g(x)$ в окрестности точке a и $\lim_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim_{x \to a} g(x) = B$ то $A \leq B$;
4. Если $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ в окрестности точке a и $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A$ то $\lim_{x \to a} h(x) = A$;
5. Если $\lim_{x \to a} f(x) = A, A \neq 0$ тогда существует окрестность точки a, в которой $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$. В случае $A > 0$ имеется место неравенство $f(x) > \frac{A}{2}$ а в случае $A < 0$ имеется место неравенство $f(x) < \frac{A}{2}$.
6. Арифметические свойства пределов функций.

Доказательство.

Критерий существования предела функции

Критерий Коши для существования предела функции:

Для того чтобы существовал $\lim_{x \to a} f(x)$ необходимо и достаточно чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, x'$$

$$\Big(\big((0 < |x - a| < \delta) \wedge (0 < |x' - a| < \delta)\big) \Rightarrow (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)\Big)$$

(док-во Vien, BGGT1 tr.12)

Прак.1 ч.

Упражнения [3] 3.21; 3.24; 3.25; 3.26; 3.27; 3.28.

Слова и выражения.

5- ая Лекция
Л2+Пр2
Лек. 2 ч.

2.6. Бесконечно малая (БМ) и бесконечно большая (ББ)

Когда $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ то говорим, что $f(x)$ - бесконечно малая (БМ) при $x \to a$ и тогда пишем $f(x) = o(1)$ (читается $f(x)$ есть o −малая от единицы).

Когда $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ или $\pm\infty$ то говорим, что $f(x)$ - бесконечно большая (ББ) при $x \to a$. Очевидно что $f(x)$ ($f(x) \neq 0$) ББ тогда и толко тогда, когда $\frac{1}{f(x)}$ − БМ. Таким образом изучение ББ при $x \to a$ сводится к изучению БМ в том же процессе $x \to a$. По этой причине в дальнешее мы рассмотрим только бесконечно малые.

Пусть $f(x), g(x)$ − БМ. Если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ то говорим, что $f(x)$ есть БМ высшего порядка по отношению к $g(x)$ и пишем $f(x) = o(g(x))$ (читается $f(x)$ есть o −малая от $g(x)$). Очевидно что, $f(x) = o\big(g(x)\big) \Leftrightarrow f(x) = \alpha . g(x)$; где $\alpha \to 0$ когда $x \to a$.

Если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ $(K \neq 0)$ то говорим что $f(x)$ и $g(x)$ БМ одного порядка и пишем $f(x) = O(g(x))$:читается $f(x)$ есть O −большая от $g(x)$. Когда $K = 1$ то говорят $f(x)$ и $g(x)$ есть эквивалентные БМ и пишем $f(x) \sim g(x)$.

- Легко видеть $f(x) = O\big(g(x)\big) \Leftrightarrow f(x) = Kg(x) + o(g(x))$ $(K \neq 0)$
- Когда $g(x) \sim g_1(x)$ и $f(x) \sim f_1(x)$ при $x \to a$ то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (1)$$

считая $g(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0$ в некоторой окресности точке a.

Формула (1) даёт нам правило замены эквивалентных величин в процессе нахождения пределов.

Прак. 2 ч.

Упражнения [3] 3.31; 3.33; 3.34; 3.35; 3.36; 3.42; 3.43; 3.48; 3.49. (VT832)

Слова и выражения.

6- ая Лекция

Л3+ Пр1
Лек. 3 ч.

3. Непрерывность функции

3.1. Понятие непрерывности функции. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва

Определение. Функция $f(x)$, определённая в окрестности точки a называется **непрерывной** в a если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в a если она определена в a и слева от a такая что

$$\lim_{x\to a, x<a} f(x) = f(a-0) = f(a)$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \ \big((a-\delta < x \le a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в a если она определена в a и справа от a такая что

$$\lim_{x\to a, x>a} f(x) = f(a+0) = f(a)$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \ \big((a \le x < a+\delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$

Очевидно что функция $f(x)$ является непрерывной в a тогда и только тогда, когда она одновременно непрерывна слева и справа в a т.е. $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$.

Арифметические свойства непрерывности функций.

Теорема. *Если $f(x), g(x)$ непрерывные функции в точке а то их сумма, разность, произведение и частность (в случае $g(a) \neq 0$) также есть непрерывные функции в точке a*;

Классификация точек разрыва: точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва a функции $f(x)$ называется **точкой разрыва** $1^{\text{ого}}$ **рода** если существует и конечны $f(a+0), f(a-0)$. Точка разрыва a $1^{\text{ого}}$ рода функции $f(x)$ называется **точкой устранимого разрыва** если $f(a+0) = f(a-0)$. Точка разрыва a функции $f(x)$ называется **точкой разрыва** $2^{\text{ого}}$ **рода** если хотя бы одно из чисел $f(a+0), f(a-0)$- бесконечное.

Если a - точка устранимого разрыва функции $f(x)$, то доопределить $f(a) = f(a+0)$ то функция $f(x)$ будет непрерывной в a .

3.2. Непрерывность сложной фукции

Если $f(x)$ *непрерывная функция в* x_0, $\varphi(t)$ *непрерывная функция в* t_0, *такая что* $x_0 = \varphi(t_0)$ *тогда сложная функция* $f\big(\varphi(t)\big)$ *будет непрерывной в* t_0.

Доказательство.

3.3. Непрерывность обратной фукции

<u>Теорема</u>. *Если* $y = f(x)$ *функция строго монотонно возрастает и непрерывна на отрезке* $[a, b]$, $f(a) = A, f(b) = B$ *то существует обратная функция*
$x = g(y): [A, B] \to [a, b]$, *которая имеет одинаковое свойство монотонности как* $f(x)$ *и также является непрерывной функцией на* $[A, B]$.

Аналогично для строго монотонно убывающей непрерывной функции на $[a, b]$

Справедливы также аналогичные теоремы на интервалах
(a, b); $(a,b]$ или $[a,b)$ (ОЛ.2, с.102-103).

Практика 1 час.

Упражнения [3]: 3.53; 3.54; 3.59; 3.61; 3.63; 3.64.

Слова и выражения.

7- ая Лекция

Лек. 3 ч.+ Прак. 1 ч.

3.4. Непрерывная функция на отрезке

Теорема 1. Непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ ограничена на этом отрезке.

Доказательство.

Теорема 2 (Вейерштрасса) Если $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ то она принимает максимальное и минимальное значения на $[a, b]$, т. е. существуют $x_1 \in [a, b], x_2 \in [a, b]$ такие чтобы

$$f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \text{ и } f(x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

Доказательство.

Теорема 3 (Об обращении в нуль непрерывной функции)

Если $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ такая что $f(a)f(b) < 0$ тогда существует $\mathrm{c} \in (a, b)$ что $f(\mathrm{c}) = 0$.

Следствие: Если $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ такая что $f(a) = A, f(b) = B$ $(A \neq B)$ а C произвольное число: $A < C < B$. Тогда существует $\mathrm{c} \in (a, b)$ такое что $f(\mathrm{c}) = C$.

Понятие равномерной непрерывности

Функция $f(x)$ определена на множестве E называеся равномерно непрерывной на E если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x', x'' \in \mathrm{E}\ \big((|x' - x''| < \delta) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\big)$$

Теорема 4 (О равномерной непретывности).

Непрерывная функция на отрезке будет равномерно непретывной на этом отрезке. (без док-а)

3.5. Замечательные пределы

1. $\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = lna$
4. $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu$

Практика 1час.

Упражнения: [3] 3.55; 3.56; 3.61; 3.72; 3.74.

Слова и выражения.

8- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

4. Производная и дифференциал

4.1. Понятие производной функции

Определение производной функции : Пусть $f(x)$ − функция, определена в окрестности точки x_0. Зададим x_0 некоторое приращение Δx так чтобы $(x_0 + \Delta x)$ не выходит из этой окрестности. Тогда x получит новое значение $x = x_0 + \Delta x$, а функция $f(x)$ получает новое значение $f(x_0 + \Delta x)$ и приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в точке x_0. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad (1)$$

то $f'(x_0)$ называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Разные обозначения производной функции $f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0), \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \qquad Df(x)|_{x=x_0}$$

Определяется понятия правой и левой производной в точке x_0, как

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x}; \; f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad (2)$$

Очевидно что функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют правая и левая производные в точке x_0 и они равны.

Из (1) получаем $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ поэтому $\Delta f \to 0$ если $\Delta x \to 0$. Иными словами, если функция имеет производную в точке x_0 то она непрерывна в x_0.

Геометрический смысл производной: $f'(x_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой , задаваемой уравнением $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Механическая интерпретация производной. *Производная* $s'(t_0)$ *от функции движения* $s = s(t)$ *от времени* t *есть мгновенная скорость движения в момент времени* t_0.

4.2. Производная сложной функции

Теорема 1.
Если $y = f(x), x = \varphi(t)$ *−функции, такие что* $f(x)$ *дифференцируема в* x_0, $\varphi(t)$ *дифференцируема в точке* t_0; где $x_0 = \varphi(t_0)$. *Тогда сложная функция* $F(t) = f\big(\varphi(t)\big)$ *дифференцируема в* t_0 *причём имеется место следующей формулы*

$$F'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0) \quad (5)$$

Или символически $y'(t) = y'(x)x'(t)$

Доказательство.

Практические занятия 1 час.

Упражнения: [3] 4.7; 4.10; 4.11; 4.12; 4.13.

Слова и выражения.

9- ая Лекция
Лек. 3 ч.+ Прак. 1 ч.

4.3. Производная обратной функции

Теорема 2.

Если $y = f(x)$ *функция строго монотоно возрастает (убывает) и непрерывна на интервале* (a, b), *существует* $f'(x_0)$ *в точке* $x_0 \in (a, b)$. *Тогда обратная функция* $x = g(y)$ *также имеет производную* $g'(y_0)$; где $y_0 = f(x_0)$, *которая вычисляется по следующей формуле*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (6)$$

Или символически

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} \quad (6.1)$$

Доказательство. Согласно теореме непрерывной обратной функции (3.3), на $[A, B]$; где $A = min_{x \in [a,b]} f(x)$, $B = max_{x \in [a,b]} f(x)$, существует непрерывная обратная функция $x = g(y) \big(\Leftrightarrow y = f(x)\big)$: $(A, B) \to (a, b)$ и в силу непрерывности функции $y = f(x)$ то $\Delta y \to 0$ когда $\Delta x \to 0$ и по предположению $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = g(y_0)$. Дадим y_0 приращение Δy тогда $x = g(y)$ получит приращение $\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$ или $g(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$ т.е. $f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$, отсюда по определению

$$x'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{(y_0 + \Delta y) - y_0}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x)} \ \square$$

Если обозначать $y = f^{-1}(x)$ есть обратная функция к $y = f(x)$ то (6) принимает вид

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (6.2)$$

Пример 2. Так как $y = arcsinx \Leftrightarrow x = siny$ то согласно (6.1)

$$y' = (arcsinx)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(arcsinx)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ \square$$

Пример 3. Функция $y = arctgx$ есть обратная функция к $y = tgx$ поэтому согласно (6.2)

$$y' = (arctgx)' = \frac{1}{\frac{1}{cos^2\,(arctgx)}} = \frac{1}{1 + tg^2\,(arctgx)} = \frac{1}{1+x^2} \ \square$$

4.4. Производная элементарных функций

Функции $c\ (const), x^n, a^x, log_a x, sinx, cosx, tgx, Arcsinx, Arccosx, Arctgx$ называются основными элементарными функцями. Функции, полученные из основных элементарных функций применением конечного числа арифметических операций или композиций функций называются элементарными функциями. Мы имеем следующую таблицу производных важных элементарных функций.

$$c' = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x lna \quad (a > 0)$$

$$(lnx)' = \frac{1}{x} \qquad (log_a x)' = \frac{1}{xlna}$$

$$(sinx)' = cosx \qquad (cosx)' = -sinx$$

$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x} \qquad (cotgx)' = \frac{-1}{sin^2 x}$$

$$(shx)' = chx \qquad (chx)' = shx$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x} \qquad (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

$$(arcsinx)' = -(arccosx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (arctgx)' = -(arcctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Кроме того, мы также имеем формулы производных соответствующих сложных функций если заменить в высших формулах x на $f(x)$, умножив множитель $f'(x)$. Например $(sinf(x))' = f'(x)cosf(x), (lnf(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, и т.д.

Практические занятия 1 час.

Упражнения: [3] 4.18; 4.20; 4.21; 4.26; 4.28; 4.29; 4.35; 4.38; 4.43.

Слова и выражения.

10- ая Лекция

Лек. 2 ч.+ Прак. 2 ч.

4.5. Дифференциал.

Определение дифференциала: Если существует постоянная A, независящая от Δx, такая что

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (7)$$

то функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 функцией а линейное слагаемое $A\Delta x$ в (7) называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x)|_{x=x_0}$ или $df(x_0)$. Если обозначить $\Delta x = dx$ то по определению $df(x) = Adx$

<u>Теорема:</u> Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 необходимо и достаточно чтобы $f(x)$ имела конечную производную в точке x_0. Тогда $A = f'(x_0)$ и $df(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$ или вообще

$$df(x) = f'(x)dx \quad (8)$$

Доказательство.

Геометрический смысл дифференциала (см. геометрический смысл производной в 4.1).

$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x -$ Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 есть линейное приращение NT значения функции $f(x_0)$ при $x = x_0 + \Delta x$.

Свойства дифференциала. Из (8) и соответствующих свойств производных легко доказать следующие свойства дифференциала:

а) $d(u \pm v) = du \pm dv$

б) $d(uv) = vdu + udv$

в) $d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}, v \neq 0.$

4.6. Производная и дифференциал высших порядков.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) то $f'(x)$ определена на (a, b). Если функция $f'(x)$ снова дифференцируема на (a, b) то её производная называеся второй производной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Вообще производная *n*-ого порядка определяется

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \quad (9)$$

Методом математической индукции можно получать следующую формулу Лейбница

$$(uv)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \quad (10)$$

Аналонично определяется дифференциал *n*-ого порядка

$$d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right) \quad (11)$$

Инвариантность формы первого дифференциала: *Первый дифференциал не изменяет форму (8) когда* x *независимая или зависимая. Однако дифференциалы высших порядков имеют разные формы в случаях, когда* x *независимая и зависимая.*

Производная функции, заданной в параметрической форме:

По свойству инвариантности первого дифференциала имеем

$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ (7); где функция $y = y(x)$ задаётся в в параметрической форме: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Практика 2 часа.

Упражнения: [3]. 4.80; 4.81; 4.83; 4.85

Слова и выражения.

11- ая Лекция
Лек. ч.

4.7. Основные теоремы дифференциального исчисления

Понятие локального эстремума*:* Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Говорят, что $f(x)$ достигает **локального максимума** в x_0 (или ещё говорят, что $x_0 -$ точка локального максимума функции $f(x)$) если

$$\exists\delta > 0\ \forall x\ \left((0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \left(f(x) < f(x_0)\right)\right)$$

$f(x)$ достигает **локального минимума** в x_0 (или ещё говорят, что $x_0 -$ точка локального минимума функции $f(x)$) если

$$\exists\delta > 0\ \forall x\ \left((0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \left(f(x) > f(x_0)\right)\right)$$

Точки локального максимума и локального минимума функции $f(x)$ называются точками **локального эстремума** функции $f(x)$.

Если в высших определениях берётся $f(x) \leq f(x_0)$ или $f(x) \geq f(x_0)$ то получим понятия локального максимума или локального минимума функции $f(x)$ в широком смысле соответственно (сюда относится и функция, постоянная на (a,b)). Если нет необходимости различать точки локального эстремума и **локального эстремума в широком смысле** то мы скажем просто о точках **эстремума**.

<u>*Теорема Ферма*</u>*: Если функция $f(x)$ имеет производную в точке с и в этой точке достигает эстремума то* $f'(\mathrm{c}) = 0$.

Доказательство.

<u>*Теорема Ролля*</u>*: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, диффеценцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$ то существует $\xi \in (a, b)$, такая, что* $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Геометрический смысл теоремы Ролля.

Теорема Ролля утверждает, что существует точка $\xi \in (a, b)$ такая что касательная к графику функции в точке с абсциссой ξ параллельна оси Ox.

<u>Теорема Коши</u>: Если функции $f(x), g(x)$ *непрерывны на* $[a, b]$, *диффеценцируемы в* (a, b) *и* $g'(x) \neq 0$ в (a, b) *то существует* $\xi \in (a, b)$, *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (1)$$

Как следствие из теоремы Коши, в случай $g(x) = x$ мы получим следующую теорему о среднем Лагранжа

<u>Теорема Лагранжа</u>: Если функция $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *диффеценцируема в* (a, b) *то существует* $\text{c} \in (a, b)$, *такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\text{c})(b - a) \quad (2)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Теорема Лагранжа утверждает, что существует точка $\xi \in (a, b)$ такая что касательная к графику функции в точке с абсциссой ξ параллельна текущей AB, где $A(a, f(a)), B(b, f(b))$.

4.8. Приложения дифференциального исчисления

4.8.1. Формула Тейлора

<u>Теорема:</u> Пусть функция $f(x)$ *определена на* $[a, b]$, *имеет непрерывные* $f^{(n)}(x)$ *на* $[a, b]$, *существуют* $f^{(n+1)}(x)$ в (a, b); $\alpha \in (a, b), x \in (a, b)$. *Тогда существует* $\text{c} \in (\alpha, x)$, *такая, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x - \alpha)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - \alpha)^{n+1} \quad (3)$$

(3) - Формула Тейлора с остаточным членом Лагранжа.

Доказано, что если *функция* $f(x)$ *дифференцируема (n-1) раз в окрестности точки* x_0 *и имеет производную* $f^{(n)}(x_0)$ *то имеется место следующая формула Тейлора с остаточным членом Пеано*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (4)$$

Формула Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называеся формулой Маслорена

Формулы Маслорена некоторых элементарных функций:

i) $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ (5) (остаточный член Лагранжа $\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$)

ii) $sinx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n})$ (6)

(остаточный член Лагранжа $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} sin\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]; 0 < \theta < 1$)

iii) $cosx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$ (7)

(остаточный член Лагранжа $\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} cos\left[\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right]; 0 < \theta < 1$)

iv) $ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ (8)

(остаточный член Лагранжа $\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$; $0 < \theta < 1$)

v) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n);\ \alpha \in \mathbb{R}$ (9)

(остаточный член Лагранжа $\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} x^{n+1}$)

Пример. Найти прелел $\lim_{x\to 0} \frac{x - sinx}{x^3}$.

Заменяя, согласно (6), $sinx = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$ получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

4.8.2. Правила Лопиталя

<u>*Теорема 1:*</u> (*Раскрытие неопределённости вида* $\frac{0}{0}$):
Если $f(x), g(x)$ *функции, определённые и дифференцируемые и окрестности точки а, за исключения, быть может, самой точки а ,* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$; $g(x), g'(x) \neq 0$ *в окрестности точки а и существует конечный или бесконечный предел* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. *Тогда* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

<u>Теорема 2:</u> (Раскрытие неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$): Если $f(x), g(x)$ функции, определённые и дифференцируемые и окрестности точки а, за исключения, быть может, самой точки а ,
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \lim_{x\to a} g(x) = \infty;\ g(x), g'(x) \neq 0$ *в окрестности точки а и существует конечный или бесконечный предел* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$*. Тогда*
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. (Без док-ва)

Замечание:

1. Условие $x \to a$ можно заменить условием $x \to \infty$ (или $x \to \pm\infty$)
2. Существование предела $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ в теоремах 1 и 2 есть достаточное условие существования предела $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ но не необходимое.

Слова и выражения.

12- ая Лекция
Л2+Пр2
Лек. 2 ч.

4.8.3. Исследование функций с помощью производной

а) <u>Условия возрастания и убывания функции</u>

Понятие точки возрастания и убывания функции:

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Говорим, что $f(x)$ **возрастает в точки** x_0 если $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ для всех *x* из некоторой проколотой окрестности точки x_0 и $f(x)$ убывает в точки x_0 если $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$ для всех *x* из некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Лемма: Если $f(x)$ дифференцируема в точки x_0 и $f'(x_0) = c > 0$ то $f(x)$ возрастает в точки x_0 а $f'(x_0) = c < 0$ то то $f(x)$ убывает в точки x_0.

Доказательство:

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на $[a, b]$ если $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$; называется **убывающей** на $[a, b]$ если $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$; называется **неубывающей** на $[a, b]$ если $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$; называется **невозрастающей** на $[a, b]$ если $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Теорема 1: Пусть функция $f(x)$ непрерывна $[a, b]$, дифференцируема на (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была неубывающей [невозрастающей] на $[a, b]$ необходимо и достаточно чтобы и $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$ [$f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$]. (ОЛ1. с.144)

Доказательство.

Теорема 2: Пусть функция $f(x)$ непрерывна $[a, b]$, дифференцируема на (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была возрастающей [убывающей] на $[a, b]$ необходимо и достаточно чтобы и $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$ [$f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$] и кроме того $f'(x)$ не равна нулю тождественно ни на каком интервале $(a_1, b_1) \subset [a, b]$. (без док-ва) (ср. с ОЛ.1- с.123, 144).

Следствие (Vien): Пусть функция $f(x)$ непрерывна $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), такая что уравнение $f'(x) = 0$ имеет только конечные числа решений в (a, b). Тогда для того чтобы $f(x)$ была *возрастающей [убывающей] на* $[a, b]$ *необходимо и достаточно чтобы и* $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$ *[*$f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$*].*

b) Локальные эстремумы. Наибольшие и наименьшие значения.

Понятие локальных эстремумов (или просто эстремумов) были введено из лекции 15 (§4.7).

Точки *x,* для которых $f'(x) = 0$ называются **стационарными точками**.

Теорема 3: (Первое достаточное условие эстремума):

Если функция $f(x)$ *непрерывна на* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, *дифференцируема в проколотой окрестности точки* x_0 *и если*

$f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ *на* $(x_0 - \delta, x_0)$,

$f'(x) < 0$ $[f'(x) > 0]$ *на* $(x_0, x_0 + \delta)$

То $x_0 -$ *есть точка локального максимума [локального минимума] функции* $f(x)$. *Если* $f'(x)$ *не меняет знака через* x_0 *то* $f(x)$ *не имеет локального экстремума в* x_0.

Доказательство.

Теорема 4: (Второе достаточное условие эстремума):

Пусть $f'(x_0) = 0$ *и существует* $f''(x_0)$. *Тогда:*

1) *если* $f''(x_0) < 0$, *то* x_0 *точка локального максимума;*
2) *если* $f''(x_0) > 0$, *то* x_0 *точка локального минимума.*

Доказательство.

Теорема 5: (Третье достаточное условие эстремума):

Пусть

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0, f^{(2k)}(x_0) \neq 0$$

Тогда:

1) *если* $f^{(2k)}(x_0) < 0$, *то* x_0 *точка локального максимума;*
2) *если* $f^{(2k)}(x_0) > 0$, *то* x_0 *точка локального минимума.*

Доказательство (ОЛ.1- с. 146)

c) Выпуклость и точки перегиба: ((ОЛ1. с. 151; (ОЛ.2 - с. 187)))

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх** (**выпуклой**) на интервале (a, b), если график функции лежит под касательной для любой точки этого интервала.

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз** (**вогнутой**) на интервале (a, b), если график функции лежит над касательной для любой точки этого интервала.

Точка $x_0 \in (a, b)$ называется **точкой перегиба** графика функции $f(x)$ если существует проколотая δ −окрестность точки x_0 такая, что в разных полуокрестностях точки x_0 график функции имеет разные направления выпуклости.

С некоторыми изменениями определить понятия выпуклости фукции на сегменте $[a, b]$.

Теорема 6: (необходимое условие перегиба)

Если функция $f(x)$ имеет $f''(x_0)$ и x_0 − точка перегиба то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 7: (достаточное условие перегиба)

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, такая , что $f''(x_0) = 0$ и $f''(x)$ меняет знак через x_0 то x_0 − точка перегиба

d) Асимптоты: понятие вертикальной асимптоты, наклонной асимптоты (как в школьном курсе математики)

Практические занятия 2 часа.

Упражнения: [3] 5.4; -9; -12; -18; -22; -29; -30; 4.52; 4.56; 4.92; 4.94; 4.96

Слова и выражения.

13- ая Лекция
Прак. 4 ч.
4.8.4. Построение графика функции

Обшая схема исследования графика функции. Для исследования графика функции нам нужно проводить следующие работы:

- Найти область определения функции, сделать замечания о симметричности графика.
- Найти асимптоты: вертикальные, наклонные (в том числе и горизонтальные);
- Исследовать поведения функции по знаку производной;
- Исследовать выпуклость функции, найти точки перегиба;
- Найти некоторые особые точки, такие как точки пересечения с осьями координат, с асимптотами, и т.д.
- Нариссовать график функции

Примеры исследования графика функции, заданной в явном виде, в параметрической форме, в полярой форме (GTV tr.39).

Пример 1. Исследовать поведение и построить график функции, заданной в явной форме:

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}$$

Область определения: $\mathbb{R}$,
Асимптоты: две горизонтальные асимптоты $y = \pm 1$
$y' = (3-x)(x^2+3)^{-3/2} = 0 \Leftrightarrow x = 3;$
точка максимума $A\left(3, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
$y'' = (2x^2 - 9x - 3)(x^2+3)^{-5/2} = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{4}$
Точки перегиба $U_{1,2}\left(\frac{9\pm\sqrt{105}}{4}, \sqrt{\frac{13\pm\sqrt{105}}{18}}\right)$
Особые точки: $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $C(1,1)$

Пример 2. Нарисовать график функции, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t + \dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$$

Область определения: $\forall t \neq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2$

Асимптоты: Наклонная асимптота $y = x$ $(t \to \infty)$,

при $t \to 0$ нет асимптоты.

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t^2+t+1}{t(t^2-1)}$; $y''_x = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{\left(x'_t\right)^3} = \frac{-2t-1}{(t^2-1)(t+1)^2}$

$y''_x = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$; точка перегиба

$U\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$; $y'_x(U) = -2$,

касательная в точке *U* имеет коэффициент $k = -2$

При $t = -1, M_1\left(-2, -\frac{1}{2}\right), y'_x(M_1) = \infty,$ касательная в M_1 параллельна оси *Oy*.

При $t = 1, M_2\left(2, \frac{3}{2}\right), y'_x(M_2) = \frac{3}{2},$ касательная в M_2 имеет коэффициент $k = \frac{3}{2}$.

Пример 3. Построить график функции, заданной в полярной форме:

$$r = \frac{a}{\varphi} \quad (a > 0, r > 0)$$

Упражнения: [3] 4.53; 4.54; 4.59; 4.60; 4.64; 4.68; 4.69; 4.80; -82; -83; -86; -94; -96.

Упражнения: [3] 5.87; -89; -94; -101; -102.

Слова и выражения.

14- ая Лекция

Лек. 2 ч.+ Прак. 2 ч.

5. Исследование общего уравнения второго порядка на плоскости

5.1. Движения Декартовой системы координат

- Декартово прямоугольная система координат Oxy
- Параллельный сдвиг на $I(a,b)$: $Oxy \to Ix'y'$ по формуле

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \quad (1)$$

- Вращение на угол α ($\alpha > 0$ – против часовой стрелки): $Oxy \to Ox'y'$ по формуле

$$\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases} \quad (2)$$

5.2. Общее уравнение второго порядка и его инварианты

Для удобства применить язык Геометрии мы зовём x – точкой; $x \in \mathbb{R}^2$.

Общим уравнением второго порядка на плоскости является уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\,a_{13}x + 2\,a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (3)$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Совокувность всех точек на плоскости, которая удовлетворяет уравнению (3) называется кривой второго порядка.

1. Можно показать, что при применении движений (1), (2) над Декартово прямоугольной системой координат, следующие числа являются инвариантами:

$$J_1 = a_{11} + a_{22};\ J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Действительно, при преобразовании (1), подставив $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$ в (3), мы получим новое уравнение $a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{13} = 0$; где $a'_{11} = a_{11}, a'_{12} = a_{12}, a'_{22} = a_{22}$ поэтому конечно J_1, J_2 не изменяются т.е. остаются инвариантами. А при преобразовании (2), подставив $\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$ в (3), мы получим новое уравнение $a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{13} = 0$; где

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11}cos^2\alpha + 2a_{12}sin\alpha cos\alpha + a_{22}sin^2\alpha \\ a'_{12} = (a_{22} - a_{11})sin\alpha cos\alpha + a_{12}(cos^2\alpha - sin^2\alpha) \quad (4) \\ a'_{22} = a_{11}sin^2\alpha - 2a_{12}sin\alpha cos\alpha + a_{22}cos^2\alpha \end{cases}$$

тогда, легко видедь, что $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$ т.е. $J_1 -$ инвариант, а $\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}cos^2\alpha + 2a_{12}sin\alpha cos\alpha + a_{22}sin^2\alpha)(a_{11}sin^2\alpha - 2a_{12}sin\alpha cos\alpha + a_{22}cos^2\alpha) - \left((a_{22} - a_{11})sin\alpha cos\alpha + a_{12}(cos^2\alpha - sin^2\alpha)\right)^2 = a_{11}a_{22}(sin^4\alpha + cos^4\alpha + 2sin^2\alpha cos^2\alpha) - a_{12}^2(sin^4\alpha + cos^4\alpha + 2sin^2\alpha cos^2\alpha) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ т.е. $J_2 -$ инвариант.

2. Случай, когда $J_2 > 0$ уравнение (3) называется уравнением *эллиптического типа*; Случай, когда $J_2 < 0$ уравнение (3) называется уравнением *гиперболического типа* а когда $J_2 = 0$ уравнение (3) называется уравнением *параболического типа*.

3. Если $J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ то кривая, описываемая уравнением (3) имеет центр симметрии $I(x_0, y_0)$; где (x_0, y_0) удовлетворяет системе

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Действительно, когда $J_2 \neq 0$, делая параллельный сдвиг на $I(x_0, y_0)$: $Oxy \to Ix'y'$ по формуле $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ из (3) мы получаем новое уравнения без слагаемых первой стенени x', y': $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0 \quad (3)'$ потому что тогда, по предположению (4), $a_{11} = a'_{11}, a_{22} = a'_{22},\ a_{12} = a'_{12},\ a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0,\ a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0.$ Если теперь в уравнении (3)’ сделать замену x' на x'', y' на y'' одновременно то ясно что уравнение (3)’ не меняет вид, что означает $I(x_0, y_0) -$ начало новой системы координат $Ix'y'$ есть центр симметрии заданной кривой (3) в новой системе координат $Ix''y''$. Но свойство быть центром симметрии кривой, конечно, не изменяется в различных системах координат.

4. При вращении системы координат Oxy к $Ox'y'$ на угол α ($\alpha > 0$ – против часовой стрелки) по формуле (2) с условием

$$cotg2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \quad (a_{12} \neq 0) \quad (6)$$

то $a'_{12} = (a_{22} - a_{11}) sin\alpha cos\alpha + a_{12}(cos^2\alpha - sin^2\alpha) = 0$ поэтому из (3), после преобразования (2) мы получим новое уравнения без слагаемого смешанного произведения $x'y'$.

Практические занятия 2 часа.

Упражнения: [6] 4.2.8; -9; -10 a, b, c.; -11a, d.

Слова и выражения.

15- ая Лекция

Л2+Пр2
Лекция 2 часа.

5.3. Приведение общего уравнения второго порядка к каноническому виду

Канонический вид уравнения второго порядка на плоскости это такое вид уравнения (3), в котором каждая переменная входит в уравнение либо в квадрате либо в первой степени. Такие уравнения как, каноническое уравнение Эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, каноническое уравнение Гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, или каноническое уравнение Параболы: $y^2=2px$.

Случай 1. Если $J_2\neq 0$ то сначала по (5) параллельным сдвигом (1) к центру симетрии $I(x_0,y_0)$ свести уравнение к виду без линейнных слагаемых а потом вращением системы координат по формуле (2) так, чтобы имеется (6) привести уравнение к виду без слагаемого смешанного произведения переменных а это последний вид уже канонический.

Случай 2. Если $J_2=0$ то сначала вращением системы координат по формуле (2) так, чтобы имеется (6) свести уравнение к виду без слагаемого смешанного произведения $x'y'$ а потом сделать параллельный сдвиг к каноническому виду.

5.4. Классификация линий второго порядка

Имеем следующие канонические уравнения:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-$ Эллипс (мнимый Эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ или точка: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$);

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-$ Гипербола оси *Ox* (Гипербола оси *Oy* или уравнение двух пересекающихся прямых: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$);

$y^2=2px-$ Парабола оси *Ox* (Парабола оси *Oy* или уравнение двух параллельных прямых: $y^2=1$)

Практические занятия 2 часа.

Упражнения: [6] 4.2.12a, b, g.

Слова и выражения.