КОНКРЕТНЫЙ ЛЕКЦИОНО-УЧЕБНЫЙ ПЛАН ЗАНЯТИЙ

Учеб. год: 2013-2014 семестр: 2 Класс, группа: DKNN
Дициплина: Избранные вопросы высшей математики на Русском языке
Обьём зн.: 3 модуля (Л: 30; Пр.: 30) (3 tín chỉ)
Преподаватель: Вьен Н.С. Сопреподаватель:
Факультет: ИТ Кафедра: Высшая математика

Группа спец.: Высшая математика

1- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

1. **Предел последовательности**
   - **1.1.** Определение предела последовательности
   - **1.2.** Свойства пределов
   - **1.3.** Критерий Коши

Действительные числа: рациональные и иррациональные числа

Обозначения: $\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

$\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ - множество всех рациональных чисел

$\mathbb{Q} = \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_*;\ \frac{m}{n} = \frac{m\prime}{n\prime} \Leftrightarrow mn' = m'n$

$\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - множество всех иррациональных чисел

$A \setminus \{0\} = A_*$- множество чисел из A без нуля;

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}_*$

Sup, inf, полнота множества действительных чисел

Верхняя грань: Число x называется верхней граню множества A если
$\forall a\ (a \in A\ \Rightarrow x \geq a)$

Нижняя грань: Число x называется нижней граню множества A если
$\forall a\ (a \in A\ \Rightarrow x \leq a)$

Sup$A$: Наименьшая α из всех верхних граней множества A называется правильной верхней гранью и обозначется $\alpha = \mathrm{Sup}A$. Таким образом
$\alpha = \mathrm{Sup}A \Leftrightarrow$

$\big(\forall a\ (a \in A\ \Rightarrow \alpha \geq a)\big) \wedge \Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists a' \Big(\big(a' \in A\big) \wedge \big((\alpha - \varepsilon) < a' \leq \alpha\big)\Big)\Big)$

Inf$A$: Наибольшая β из всех нижних граней множества A называется правильной нижней гранью и обозначется $\beta = \mathrm{Inf}A$.

Таким образом

$\beta = \mathrm{Inf}A \Leftrightarrow$

$\big(\forall a\ (a \in A\ \Rightarrow \beta \leq a)\big) \wedge \Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists a' \Big(\big(a' \in A\big) \wedge \big(\beta \leq a' < (\beta + \varepsilon)\big)\Big)\Big)$

Интервал, отрезок, абсолютная величина.

Интервалы: (a, b)- окрытый интервал; $(a,b]$, $[a,b)$- полуокрытые интервалы; $[a, b]$- замкнутый интервал или отрезок (или сегмент).

Абсолютная величина: $|a| = \begin{cases} a \text{ если } a \geq 0 \\ -a \text{ если } a < 0 \end{cases}$

Свойства абсолютных величин:

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|ab| = |a||b|$

1.1. Предел посл-сти действительных чисел

$$lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \big((n \geq N) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon)\big)$$

Теоремы о пределе посл-сти действительных чисел

(необходмые условия сходимости последовательностей)

1.2. Свойства пределов

i) Последовательность имеет предел – ограничена;

ii) Последовательность имеет предел то он один;

iii) Если $x_n \leq y_n$ и $lim x_n = a, lim y_n = b$ то $a \leq b$;

iv) Если $x_n \leq z_n \leq y_n$ и $lim x_n = lim y_n = a$ то $lim z_n = a$

v) Арифметические свойства пределов

1.3. Критерий Коши

Для того чтобы последовательность (x_n) имела предел необходимо и достаточно чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m\ \forall n \big((m \geq N) \wedge (n \geq N) \Rightarrow (|x_m - x_n| < \varepsilon)\big)$ (1)

Пример: Доказать что последовательность (x_n); $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ не имеет предела когда $n \to \infty$.

Из (1) легко видеть, что последовательность (x_n) не имеет предела когда $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N\ \exists m\ \exists n\big((m \geq N) \wedge (n \geq N) \wedge (|x_m - x_n| \geq \varepsilon_0)\big) \quad (2)$$

Взяв $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, m = 2n$ будем иметь

$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ ч.и.т.д. (2).

Прак.1 ч.

Упражнения: [3]:

1.3; 1.5; 1.6; 1.11; 1.13;

Слова и выражения:

конкретный cụ thể; лекция bài giảng; план kế hoạch; занятие tiết học;

конкретный лекционо-учебный план занятий   kế hoạch chi tiết bài giảng các tiết học

дисциплина môn học; обьём   thể tích, khối lượng; обьём занятий   số tiết học;

избранные вопросы высшей математики   các câu hỏi chọn lọc toán cao cấp; предел последовательностей   giới hạn dãy

определение   định nghĩa; критерий   tiêu chuẩn; признак   dấu hiệu; множество   tập hợp

$\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел   tập tất cả các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел   tập tất cả các số nguyên
$\mathbb{Q}$ - множество всех рациональных чисел   tập tất cả các số hữu tỷ
$\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел   tập tất cả các số thực
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - множество всех иррациональных чисел   tập tất cả các số vô tỷ
$A \setminus \{0\} = A_*$- множество чисел из A без нуля   tập tất cả các số của tập A trừ số 0

верхняя грань   cận trên; нижняя грань   cận dưới
Sup$A$: наименьшая верхняя грань множества A   Sup$A$: cận trên đúng – cận trên nhỏ nhất

Inf$A$: наибольшая нижняя грань множества A Inf$A$: cận dưới đúng – cận dưới lớn nhất

называться được gọi là; обозначаться được ký hiệu là; таким образом như vậy là; интервал khoảng; отрезок ≡ сегмент đoạn kín; свойство tính chất; абсолютная величина trị tuyệt đối; теорема định lý; необходимость sự cần thiết; необходимое условие điều kiện cần

достаточность sự đủ; достаточное условие điều kiện đủ

необходимое и достаточное условие điều kiện cần và đủ

ограниченность sự bị chặn, giới nội

если…то… nếu … thì…

для того чтобы… необходимо и достаточно чтобы… để có …điều kiện cần và đủ là …

доказать что chứng minh rằng

легко видеть что dễ dàng thấy

тогда и только тогда, когда khi và chỉ khi

брать-взять (гл.) lấy, cầm lấy (động từ)

практика sự thực hành; упражнение bài tập thực hành; задача bài tập.

2- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

1.4. Предел монотонной последовательности. Число e

Последовательность (x_n) называется **неубывающей** если $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; называется **невозрастающей** если $x_n \ge x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Последовательность (x_n) называется **монотонной** если она является неубывающей или невозрастающей последовательностью.

Говорят, что последовательность (x_n) **строго монотонно возрастает** если $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; (x_n) - **строго монотонно убывает** если $x_n > x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

Пример 1. Последовательность (x_n); где $x_n = \frac{1}{n}, n = 1,2, \dots$ - строго монотонно убывает.

Пример 2. Последовательность (y_n); где $y_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{если } n = 2k \\ \frac{1}{k} & \text{если } n = 2k-1 \end{cases}$ - монотонно убывает или невозрастающая последовательность, действительно легко видеть, что (y_n) есть $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots$

Пример 3. Последовательность (x_n); где $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}, n = 1,2, \dots$- не является монотонной, так как при $n = 2k+1, x_n = 0$; при $n = 2k, x_n = \frac{1}{k}$.

Критерий Коши для существования предела монотонных последователностей: *Неубывающая последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.*

Невозрастающая последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена снизу.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n -$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3.

1.5. Принцип вложенных отрезков

Пусть $\sigma_n = [a_n, b_n] n = 1,2, \ldots -$ *вложенные отрезки:* $\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \cdots \supset \sigma_n \supset \cdots$, $|\sigma_n| = (b_n - a_n) \to 0, n \to +\infty$. *Тогда существует единственное число, общее для всех* σ_n,

$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n$, *причём* $c = lim_{n\to+\infty} a_n = lim_{n\to+\infty} b_n$.

Доказательство: Имеются следующие очевидные неравенства для любых натуральных m, n:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq \cdots \leq b_m$$

Так что, последовательность (a_n) не убывает и органичена сверху числом b_m поэтому существует предел $c = lim_{n\to+\infty} a_n$ причём $a_n \leq c \leq b_m \; \forall m, n \in \mathbb{N}$ или $c \in \sigma_n \forall n \in \mathbb{N}$. Аналогично $lim_{n\to+\infty} b_n = c'$.

Посколку $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ то $c = c'$.□

1.6. Теорема Больцано – Вейерштрасса

Из всякой органиченной последовательности действительных чисел (x_n) *всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность* (x_{n_k})

Доказательство: Докажем теорему для органиченной сверху последовательности. Так как множество $E = \{x_n\}$ органичено сверху, согластно теореме о полноте множества действительных чисел существует $\alpha = \sup_n x_n$. Взяв $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, согластно определению sup $\exists x_{n_k} \in E$, такие что $\alpha - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq \alpha$. Можно считать что $x_{n_k}, k = 1,2, \ldots -$ разные так как, когда $k \to \infty$ то $\frac{1}{k} \to 0$. Таким образом доказано $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$.□

Прак.1 ч.

Упражнения [3]: 2.2a; 2.4; 2.28c (VT201-202); 2.28; 2.33; 2.34;

Слова и выражения:

монотонная последовательность dãy đơn điệu;

неубывающая последовательность dãy không giảm;

невозрастающая последовательность dãy không tăng

ограничено сверху; ограничено снизу bị chặn trên, bị chặn dưới

принцип вложенных отрезков nguyên lý các đoạn thẳng lồng nhau

пусть giả sử rằng;

единственное число số duy nhất;

доказательство chứng minh;

равенство, неравенство đẳng thức, bất đẳng thức;

любой tùy ý;

выделить trích ra ;

подпоследовательность dãy con;

сходящаяся подпоследовательность dãy con hội tụ.

3- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

2. Функция и предел функции

2.1. Понятие функции. Сложная фукция.

1. Отображение $f: A \to B; A, B \subset \mathbb{R}$ называется **функцией**, определённой на множестве A со значениями в множестве B.

Иными словами $f: A \to B; A, B \subset \mathbb{R}$ называется функцией если каждому числу $x \in A$ ставится в сооветствие единственное число $y = f(x) \in B$. $f(x) -$ называется значением функции f в точке x. Тогда говорят что функция $f(x)$, определена на множестве A со значением в B.

Пример 1. Элементарные функции: $c, x, x^{\alpha}, sinx, cosx, tgx, ctgx, \dots$

Множество $\{\Gamma = (x, y), x \in A: y = f(x)\}$ называется **графиком** функции $y = f(x)$.

Понятие образ и прообраз функции

Если $y = f(x)$ то число y называется **образом** числа x; в своей очереди число x называется **прообразом** числа y.

Множество $f^{-1}(y) = \{x \in A: y = f(x)\}$ называется полным прообразом числа $y \in B$.

Пример 2. Если $f(x) = x^2: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ то $f^{-1}(4) = \{-2,2\} = \{\pm 2\}$;

Пример 3. Если $f(x) = 3x - 1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ то $f^{-1}(\gamma) = \left\{\frac{\gamma+1}{3};\ \gamma \in \mathbb{R}\right\}$.

Понятие функции вложения, функция на, взаимно однозначная функция.

Функция $f: A \to B$ называется функцией вложения (или однозначной функцией) если из того, что $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$;

Пример 4. Функция $y = f(x) = sinx: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ есть однозначная функция но не является функцей на.

Функция $f: A \to B$ называется функцией на (или функцией сюрьективной) если всякое число $y \in B$ имеет прообраз, т.е. $\forall y \in B\ f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Пример 5. Функция $y = y(x) = x^2: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ есть функция на но не является однозначной функцей.

Функция $f: A \to B$ называется взаимно однозначной функцией если она одновременно является функцией вложения и функцией на.

Пример 6. Функция $y = f(x) = sinx: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ есть взаимно однозначная функция.

2.2. Композиция функций и **сложная функция**.

Пусть $f: A \to B, g: B \to C$ функции. Тогда функция $h: A \to C$, определяемая соотношением $h(a) = g\big(f(a)\big)\ \forall a \in A$ называется композицией функций f и g и обозначается $h = g \circ f$

Пример 7. Если $f(x) = sinx: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = (2x + 1): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ то $g\big(f(x)\big) = 2sinx + 1$ а $f\big(g(x)\big) = \sin(2x + 1)$.

2.3. Обратная фукция

1. Пусть $f: A \to B$ есть функция; $A, B \subset \mathbb{R}$. Функция $g: B \to A$ называется обратной для f функцией и обозначается $g = f^{-1}$ если $g\big(f(x)\big) = x\ \forall x \in A$ и $f\big(g(y)\big) = y\ \forall y \in B$.

Теорема. *Для того чтобы функция $f: A \to B$ имела обратную $f^{-1}: B \to A$ необходимо и достаточно чтобы f есть взаимно однозначная функция (или на языке отображений, f есть биекция)*

Доказательство.

Необходимость. Пусть $f: A \to B$ имеет обратную $g: B \to A$. Мы докажем, что f есть

+) функция на, действительно $\forall b \in B\ \exists a \in A\ (a = g(b))$ тогда $f(a) = f(g(b))$ или по определению $f(a) = b$.

+) Одназначная функция, действительно если $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$ и $b_1 = b_2$ то $a_1 = g\big(f(a_1)\big) = g\big(f(a_2)\big) = a_2$ ч.и.т.д.

Достаточно . Пусть $f: A \to B$ есть биекция, тогда построить $g: B \to A$ по правилу $g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$. Легко видеть что $g: B \to A$ есть функция и более $g = f^{-1}$ □

Обозначим Г есть график функции $y = f(x)$, Γ^{-1} есть график функции $y = f^{-1}(x)$ то очевидно что $(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow (y, x) \in \Gamma^{-1}$ т.е. график функции $y = f(x)$ и график функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы 1 –ой четверти.

2. Пример 1. $y = e^x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ есть монотонно возрастающая функция на поэтому есть биекция; для неё обратная функция есть $y = lnx: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, которая определяется $y = lnx \Leftrightarrow x = e^y$.

Пример 2. $y = sinx: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ тоже есть монотонно возрастающая функция; для неё обратная функция есть $y = arcsinx: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ которая определяется $y = arcsinx \Leftrightarrow x = siny$; и вообще
$y = Arcsinx: [-1,1] \to \mathbb{R}$ периодически распространяется функция
$x = siny: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ на всей оси Оу по формуле
$Arcsinx = (-1)^n arcsinx + n\pi;\ n \in \mathbb{Z}.$

Аналонично определяется $y = arccosx: [-1,1] \to [0, \pi]$; $y = arccosx \Leftrightarrow x = cosy$ и $y = Arccosx: [-1,1] \to \mathbb{R}$ $Arccosx = \pm arccosx + 2n\pi;\ n \in \mathbb{Z}.$

$y = arctgx: \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ по формуле $y = arctgx \Leftrightarrow x = tgy$; $Arctgx = arctgx + n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

$y = arcctgx: \mathbb{R} \to [0, \pi]$ по формуле $y = arcctgx \Leftrightarrow x = ctgy$;
$Arcctgx = arcctgx + n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

3. Гиперболические функции.

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; thx = \frac{shx}{chx}; cthx = \frac{chx}{shx}$$

Основные формулы

$$sh(x + y) = shxchy + shychx \quad (1)$$
$$ch(x + y) = chxchy + shxshy \quad (2)$$
$$ch^2x - sh^2x = 1 \quad (3)$$

Прак. 1 ч.

Упражнения: [3] 2.2 b; 2.9; 2.15;

Упражнения: [5] 3.16; 3.18; 3.22.

Слова и выражения:

функция   hàm số; сложная ф-я   hàm hợp; отображение   ánh xạ;

иными словами   nói một cách khác;

(чему) ставится в соответствие (что)   (cái gì) đặt vào sự tương ứng với (cái gì);

график   đồ thị; образ   ảnh; прообраз   đảo ảnh;

функция вложения (однозначная функция)   hàm đơn ánh;

функция на   hàm toàn ánh;

взаимно однозначная ф-я   hàm song ánh;

однозначная функция (иньективная функция)   hàm đơn ánh;

сюрьективная функция   hàm toàn ánh;

композиция функций   hợp hàm.

обратная функция   hàm số ngược;

на языке отображений   trên ngôn ngữ của ánh xạ;

действительно   thật vậy; биекция   song ánh;

обозначать-обозначить (гл.)   ký hiệu (động từ);

монотонно возрастающая функция   hàm số đơn điệu tăng;

монотонно убывающая функция   hàm số đơn điệu giảm;

периодическая ф-я   hàm tuần hoàn;

период   chu kỳ; аналогично   tương tự;

гиперболические функции   hàm hypebol.

4- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

2.4. Два определения предела функции

Множество $\{x \in (a-\delta, a+\delta)\}$ называется δ −**окрестностью** точки a.

Множество $\{(a-\delta, a+\delta)\}\backslash\{a\}$ называется проколотой δ −окрестностью точки a.

Опр.1 (по Коши или по языку $\varepsilon - \delta$): Пусть $f(x)$ − функция, определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Говорят что $f(x)$ имеет предел числом A при $x \to a$ и пишут $\lim_{x\to a} f(x) = A$ если

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \big(0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)\big)$$

Опр.2: (по Гейне или по языку последовательностей)

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \left((lim x_n = a) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right)\right)$$

Доказательство их эквивалентности

a) Из опр.1 следует опр.2: Пусть (x_n) последовательность $x_n \to a$, тогда по определению предела последовательности то по $\delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \delta)$, тогда по опр.1 имеем $|f(x_n) - A| < \varepsilon\ \forall n \geq N$ т.е. $f(x_n) \to A$ по языку последовательностей (ч.и.т.д.)

b) Из опр.2 следует опр.1: Методом отпротивного, пусть $f(x_n) \to A$ для всякой последовательности $x_n \to a$ но нет

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

тогда по определению 1 существует $\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta_k = \frac{1}{k} > 0\ \exists x_{n_k} \neq a\ \left((\left|x_{n_k} - a\right| < \frac{1}{k}) \wedge \left(\left|f\left(x_{n_k}\right) - A\right| \geq \varepsilon_0\right)\right)$. Тогда ясно что, последовательности $x_{n_k} \to a$ но поскольку $\left|f\left(x_{n_k}\right) - A\right| \geq \varepsilon_0$ то нет $f\left(x_{n_k}\right) \to A$, что противоречит предположению $f(x_n) \to A$.

Эквивалентность двух определений польностью доказана. □

Понятие **предела справа**, **слева**

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a,\ x>a} f(x) = A$$

или по языку последовательности это означает $\forall x_n \to a, x_n > a$ имеем $f(x_n) \to A$. □

Аналогично для
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a,\ x<a} f(x) = A,$$
или по языку $\varepsilon - \delta$ это означает
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \big((a-\delta < x < a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\big)$$
Пример 1. Функция $f(x) = signx = \begin{cases} 1 \text{ если } x > 0 \\ 0 \text{ если } x = 0 \\ -1 \text{ если } x < 0 \end{cases}; x \in \mathbb{R}$, называется функцией знака числа x. Легко видеть, что для любых действительных чисел $\alpha > 0, \beta < 0$
$$f(\beta) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = -1,\ \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1 = f(\alpha).$$
Пример 2. Рассмотрим функцию целой части $f(x) = [x]$ числа $x \in \mathbb{R}$, которая определяется следующим образом
$$[x] \le x < [x] + 1,$$
$[x]$ - есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x. Например, $[1{,}2] = 1$ а $[-(1{,}2)] = -2$. Очевидно, что для любого целого $m \in \mathbb{Z}$
$$\lim_{x\to m-0}[x] = m - 1,\ \lim_{x\to m+0}[x] = m.$$
Замечание.

1. *Дровная часть числа* x, по определению, есть $\{x\} = x - [x]$, например $\{1{,}2\} = 0{,}2$ а $\left\{-(1{,}2)\right\} = 0{,}8$.
2. *Расстояние до ближайшеого целого* $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$, например $\|1{,}2\| = 0{,}2$; $\|-(1{,}2)\| = 0{,}2$.

2.5. Свойства пределов функции

1. Функция, имеющая предел при $x \to a$ - органичена в окрестности точке a;
2. Функция имеет предел то он один;
3. Если $f(x) \le g(x)$ в окрестности точке a и $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B$ то $A \le B$;
4. Если $f(x) \le h(x) \le g(x)$ в окрестности точке a и $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A$ то $\lim_{x\to a} h(x) = A$;
5. Если $\lim_{x\to a} f(x) = A, A \ne 0$ тогда существует окрестность точки a, в которой $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$. В случае $A > 0$ имеется место неравенство $f(x) > \frac{A}{2}$ а в случае $A < 0$ имеется место неравенство $f(x) < \frac{A}{2}$.

6. Арифметические свойства пределов функций.

Доказательство.

1. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, тогда по определению $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ имеем $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, что следует $|f(x)| < max(|A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|)$ т.е. функция $f(x)$ ограничена.□

2. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} f(x) = B$; тогда по определению

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0\ \forall x\ \left((|x-a| < \delta_1) \Rightarrow \left(|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ и

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0\ \forall x\ \left((|x-a| < \delta_1) \Rightarrow \left(|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

Обозначаем $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Из предыдущих соотношений следует, что для всех x, как только $|x-a| < \delta$ то $|A - B| \le |A - f(x)| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Так как A, B есть постоянные то последнее соотношение означает, что $|A - B| = 0$ т.е. $A = B$. □

3. Методом отпротивного, пусть $B < A$. Обозначаем $A - B = 3\varepsilon > 0$; По определению предела существует окрестность точки a для всех x в которой $g(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x)$ что противоречило предположению $f(x) \le g(x)$ в окрестности точке a. □

4. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$, существует окрестность точки a для всех x в которой $A - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < A + \varepsilon$, что означает $\lim_{x\to a} h(x) = A$. □

5. Легко видеть что $\left||f(x)| - |A|\right| \le |f(x) - A|$ поэтому из $|f(x) - A| < \varepsilon$ следует $\left||f(x)| - |A|\right| < \varepsilon$ т.е. из $\lim_{x\to a} f(x) = A, A \ne 0$ следует $\lim_{x\to a}|f(x)| = |A|$, что конечно $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$ в некоторой окрестности точки a. В случае $A > 0$ то взяв $\varepsilon = \frac{A}{2}$ получим $f(x) > A - \varepsilon = \frac{A}{2}$; В случае $A < 0$ то взяв $\varepsilon = -\frac{A}{2}$ получим $f(x) < A + \varepsilon = \frac{A}{2}$. □

6. Легко доказать следующие арифметические свойства пределов функций.

6.1. Если $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} f(x) = B$ то $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

6.2. Если $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} f(x) = B$ то $\lim_{x\to a}(f(x). g(x)) = A. B$

6.3. Если $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} f(x) = B, B \ne 0$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$. □

Критерий существования предела функции

Критерий Коши для существования предела функции:

Для того чтобы существовал $\lim_{x\to a} f(x)$ необходимо и достаточно чтобы

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, x'$$

$$\Big(\big((0 < |x-a| < \delta) \wedge (0 < |x'-a| < \delta)\big) \Rightarrow (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)\Big)$$

(док-во Vien, BGGT1 tr.12)

Прак.1 ч.

Упражнения [3] 3.21; 3.24; 3.25; 3.26; 3.27; 3.28.

Слова и выражения:

окрестность   lân cận; эквивалентность   tương đương;

проколотая окрестность точки a lân cận thủng a;

определение по Коши или по языку $\varepsilon - \delta$ định nghĩa theo Cosi hay theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$;

определение по Гейне или по языку последовательности   định nghĩa theo Gene hay theo ngôn ngữ dãy;

методом опротивного   bằng phương pháp phản chứng;

противоречать-противоречить (гл.)   (чему) mâu thuẫn (với cái gì)

из (чего) следует (что)   từ (cái gì) suy ra (cái gì);

предел слева   giới hạn trái; предел справа   giới hạn phải;

целая часть числа x phần nguyên của số x;

дровная часть числа x phần phân của số x;

расстояние до ближайшеого целого $\|x\|$ khoảng cách đến số nguyên gần nhất.

арифметика   số học; арифметическое свойство   tính chất số học;

предыдущий   ở trên (tính động từ).

5- ая Лекция
Л2+Пр2
Лек. 2 ч.

2.6. Бесконечно малая (БМ) и бесконечно большая (ББ)

Когда $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ то говорим, что $f(x)$ - бесконечно малая (БМ) при $x \to a$ и тогда пишем $f(x) = o(1)$ (читается $f(x)$ есть o −малая от единицы).

Когда $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ или $\pm\infty$ то говорим, что $f(x)$ - бесконечно большая (ББ) при $x \to a$. Очевидно что $f(x)$ $(f(x) \neq 0)$ ББ тогда и толко тогда, когда $\frac{1}{f(x)}$ − БМ. Действительно, по определению $\lim_{x \to a} f(x) = \infty \iff \forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \left((|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x)| > M)\right)$, так как $f(x) \neq 0$ то $|f(x)| > M$ эквивалентно $\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon = \frac{1}{M}$ (ч.и.т.д.). Таким образом изучение ББ при $x \to a$ сводится к изучению БМ в том же процессе $x \to a$. По этой причине в дальнешее мы рассмотрим только бесконечно малые.

Пусть $f(x), g(x)$ − БМ. Если $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ то говорим, что $f(x)$ есть БМ высшего порядка по отношению к $g(x)$ и пишем $f(x) = o(g(x))$ (читается $f(x)$ есть o −малая от $g(x)$). Очевидно что, $f(x) = o\left(g(x)\right) \iff f(x) = \alpha . g(x)$; где $\alpha \to 0$ когда $x \to a$.

Если $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ $(K \neq 0)$ то говорим что $f(x)$ и $g(x)$ БМ одного порядка и пишем $f(x) = O(g(x))$ (читается $f(x)$ есть O −большая от $g(x)$). Когда $K = 1$ то говорят $f(x)$ и $g(x)$ есть эквивалентные БМ и пишем $f(x) \sim g(x)$.

- Легко видеть $f(x) = O\left(g(x)\right) \iff f(x) = Kg(x) + o(g(x))$ $(K \neq 0)$
- Когда $g(x) \sim g_1(x)$ и $f(x) \sim f_1(x)$ при $x \to a$ то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (1)$$

считая $g(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0$ в некоторой окресности точке a.

Действительно, по определению $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K \iff \frac{f(x)}{g(x)} - K = o(1) \iff \frac{f(x)}{g(x)} - K = \alpha \iff f(x) = Kg(x) + \alpha . g(x) \iff f(x) = Kg(x) + o\left(g(x)\right)$; где

$\alpha \to 0$ когда $x \to a$. Первое утверждение доказано. Второе утверждение следует из того, что $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{f(x)} . \frac{f(x)}{g(x)} . \frac{g(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f(x)}{g(x)}$.□

Формула (1) даёт нам правило замены эквивалентных величин в процессе нахождения пределов.

Пример. Найти предел $\lim_{x\to a} \frac{sinx - tgx}{x^3}$, известно что $sinx \sim x$, когда $x \to 0$

Очевидно, что $\frac{sinx-tgx}{x^3} = \frac{sinx}{x} . \frac{1-\frac{1}{cosx}}{x^2} \sim \frac{1-\frac{1}{cosx}}{x^2} = \frac{cosx-1}{x^2} = -\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \sim -\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} \sim -\frac{1}{2}$. Таким образом $\lim_{x\to a} \frac{sinx-tgx}{x^3} = -\frac{1}{2}$.

Прак. 2 ч.

Упражнения [3] 3.31; 3.33; 3.34; 3.35; 3.36; 3.42; 3.43; 3.48; 3.49. (VT832)

Слова и выражения:

бесконечно малая vô cùng bé (VCB);

бесконечно большая vô cùng lớn (VCL);

читается được đọc là;

что и требуется доказать (ч.и.т.д.) điều phải chứng minh;

процесс quá trình;

причина nguyên nhân;

утверждение khẳng định;

БМ высшего порядка VCB bậc cao hơn;

БМ одного порядка VCB cùng bậc.

6- ая Лекция

Л3+ Пр1
Лек. 3 ч.

3. Непрерывность функции

3.1. Понятие непрерывности функции. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва

Определение: Функция $f(x)$, определённая в окрестности точки a называется непрерывной в a если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной слева в a если она определена в a и слева от a такая что

$$\lim_{x\to a, x<a} f(x) = f(a-0) = f(a)$$

т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \ \big((a-\delta < x \le a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$

Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в a если она определена в a и справа от a такая что

$$\lim_{x\to a, x>a} f(x) = f(a+0) = f(a)$$

т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \ \big((a \le x < a+\delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$

Очевидно что функция $f(x)$ является непрерывной в a тогда и только тогда, когда она одновременно непрерывна слева и справа в a т.е. $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$.

Пример 1. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$; $f(x) = sinx$ - непрерывные функции на $\mathbb{R}$. Арифметические свойства непрерывности функций.

Действительно, например для $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, мы докажем, что $\lim_{x\to a} x^n = a^n$. Так как $|x-a| < \delta < 1$ то $|x| \le |x-a| + |a| < |a| + 1$, поэтому если брать $|x-a| < \delta < \frac{\varepsilon}{n(|a|+1)^{n-1}}$ то

$|x^n - a^n| = |(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})| < \delta(|x^{n-1}| + |x^{n-2}a| + \dots + |a^{n-1}|) < \frac{\varepsilon(n(|a|+1)^{n-1})}{n(|a|+1)^{n-1}} = \varepsilon$ □

Для функции $f(x) = sinx$ имеем $|sinx - sina| \le 2\left|cos\frac{x+a}{2} sin\frac{x-a}{2}\right| \le 2\left|sin\frac{x-a}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a| < \varepsilon$ если только взять $\delta < \varepsilon$. □

Теорема: Если $f(x), g(x)$ непрерывные функции в точке a то их сумма, разность, произведение и частность (в случае $g(a) \neq 0$) также есть непрерывные функции в точке a; кроме того если $f(x)$ непрерывная функция в точке a и $f(a) > 0$ то существует окрестность точки a, такая что $f(x) > \frac{f(a)}{2}$ для всех точек этой окрестности. Аналогично $f(x) < \frac{f(a)}{2}$ если $f(a) < 0$, т. е. если $f(x)$ непрерывная функция в точке a, $f(a) \neq 0$ то найдётся окрестность точки a, в которой $f(x) \neq 0$.

Классификация точек разрыва: точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва a функции $f(x)$ называется **точкой разрыва** $1^{ого}$ **рода** если существует и конечны $f(a+0), f(a-0)$. Точка разрыва a $1^{ого}$ рода функции $f(x)$ называется **точкой устранимого разрыва** если $f(a+0) = f(a-0)$. Точка разрыва a функции $f(x)$ называется **точкой разрыва** $2^{ого}$ **рода** если хотя бы одно из чисел $f(a+0), f(a-0)$- бесконечное.

Пример 2. $f(x) = [x] -$ цедая часть действительного числа x ($[x] -$ это наибольшее целое число, не превосходящее x т.е. $[x] \leq x < [x] + 1$). Эта функция имеет точки разрыва $1^{ого}$ рода – все целые числа.

Пример 3. $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{если } x \neq 0 \\ 1 \text{ если } x = 0 \end{cases}$ имеет точку $x = 0 -$ точка устранимого разрыва, так как $f(0+0) = f(0-0) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Если a - точка устранимого разрыва функции $f(x)$, то доопределить $f(a) = f(a+0)$ то функция $f(x)$ будет непрерывной в a .

Пример 4. Функция $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{если } x \neq 0 \\ 1 \text{ если } x = 0 \end{cases}$ $(x \geq 0)$ имеет $x = 0 -$ точка разрыва $2^{ого}$ рода, так как $\lim_{x\to 0+0} f(x) = f(0+0) = -\infty$.

3.2. Непрерывность сложной фукции

Если $f(x)$ непрерывная функция в x_0, $\varphi(t)$ непрерывная функция в t_0, такая что $x_0 = \varphi(t_0)$ тогда сложная функция $f\big(\varphi(t)\big)$ будет непрерывной в t_0.

Доказательство. Согласно непрерывности ф-и $f(x)$ в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\sigma > 0$ что при $|x - x_0| < \sigma$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (1) Всилу непрерывности ф-и $\varphi(t)$ в точке t_0, по $\sigma > 0$ найдётся $\delta > 0$ что при $|t - t_0| < \delta$

имеем $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \sigma$. В итоге $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ так что при $|t - t_0| < \delta$, подставив $x = \varphi(t), x_0 = \varphi(t_0)$ в (1) имеем $|f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| < \varepsilon$. Доказана непрерывности сложной функции $f\big(\varphi(t)\big)$ в точке t_0. □

3.3. Непрерывность обратной фукции

<u>Теорема</u>: Если $y = f(x)$ функция строго монотонно возрастает и непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A, f(b) = B$ то существует обратная функция
$x = g(y): [A, B] \to [a, b]$, *которая имеет одинаковое свойство монотонности как $f(x)$ и также является непрерывной функцией на* $[A, B]$.

Аналогично для строго монотонно убывающей непрерывной функции на $[a, b]$

Справедливы также аналогичные теоремы на интервалах (a, b); $(a,b]$ или $[a,b)$ (ОЛ.2, с.102-103).

Практика 1 час.

Упражнения [3]: 3.53; 3.54; 3.59; 3.63; 3.64.

Слова и выражения:

непрерывность функции в точке   sự liên tục của hàm số tại một điểm;

односторонняя непрерывность   liên tục một phía;

функция $f(x)$ непрерывна слева в точке a hàm $f(x)$ liên tục trái tại a;

функция $f(x)$ непрерывна справа в точке a hàm $f(x)$ liên tục phải tại a;

точка разрыва первого (1-ого) рода   điểm gián đoạn loại một;

точка разрыва второго (2-ого) рода   điểm gián đoạn loại hai;

точка устранимого разрыва   điểm gián đoạn khắc phục được.

7- ая Лекция

Лек. 3 ч.+ Прак. 1 ч.

3.4. Непрерывная функция на отрезке

<u>Теорема 1</u>. Непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Методом опротивного. Пусть $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ но она не ограничена, тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, такие, что $|f(x_n)| > n\ \ (*)$. Из ограниченной последовательности (x_n) выделим сходящуюся подпоследовательность $\left(x_{n_k}\right) \to \alpha \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Из свойства непрерывности функции $f(x)$ следует $f\left(x_{n_k}\right) \to f(\alpha)$, что невозможно всилу полученной $(*)$, это противоречие показывает, что теорема 1 доказана. □

<u>Теорема 2</u> (Вейерштрасса) Если $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ то она принимает максимальное и минимальное значения на $[a, b]$, т. е. существуют $x_1 \in [a, b], x_2 \in [a, b]$ такие чтобы

$$f(\,x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \text{ и } f(\,x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

Доказательство. Докажем теорему для максимального значения. По теореме 1, множество $\{f(x)\}|_{x\in[a,b]}$ ограничена и поэтому по свойству полноты множества $\mathbb{R}$ существует $M = sup\{f(x)\}|_{x\in[a,b]}$; по свойству супремума $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists x_k \in [a, b]\ \left(M - \frac{1}{k}\right) < f(x_k) \le M$ что конечно $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = M$ (1) По теореме Больцано- Вейерштрасса из последовательности (x_k) выделяем сходящуюся подпоследовательность $x_{k_m} \to \alpha \in [a, b]$ а по свойству непрерывности функции $f(x), f\left(x_{k_m}\right) \to f(\alpha)$ (2). Так как функция имеет только один предел то из (1) и (2) мы получим $f(\alpha) = M$ (ч.и.т.д.). □

<u>Теорема 3</u> (Об обращении в нуль непрерывной функции)

Если $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ такая что $f(a)f(b) < 0$ тогда существует $\mathrm{c} \in (a, b)$ что $f(\mathrm{c}) = 0$.

(с доказательством)

<u>Следствие</u>: Если $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ такая что $f(a) = A, f(b) = B\ \ (A \neq B)$ а C произвольное число: $A < C < B$. Тогда существует $\mathrm{c} \in (a, b)$ такое что $f(\mathrm{c}) = C$.

Это следствие можно формировать так: Непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения между значениями на концах.

Понятие равномерной непрерывности

Функция $f(x)$ определена на множестве E называеся равномерно непрерывной на E если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x', x'' \in \mathrm{E}\ \big((|x' - x''| < \delta) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\big)$$

Теорема 4 (О равномерной непретывности).

Непрерывная функция на отрезке будет равномерно непретывной на этом отрезке. (без док-а)

3.5. Замечательные пределы

1. $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu$

Практика 1час.
Упражнения: [3] 3.55; 3.56; 3.61; 3.72; 3.74.

Слова и выражения:

максимальное значение   giá trị lớn nhất;

минимальное значение   giá trị nhỏ nhất;

свойство полноты множества действительных чисел   tính đầy đủ của tập số thực;

обращение в нуль   nhận giả trị 0;

равномерная непрерывность   liên tục đều;

замечательные пределы   các giới hạn tuyệt vời.

8- ая Лекция
Л3+Пр1
Лек. 3 ч.

4. Производная и дифференциал

4.1. Понятие производной функции

Определение производной функции : Пусть $f(x)$ − функция, определена в окрестности точки x_0. Зададим x_0 некоторое приращение Δx так чтобы $(x_0 + \Delta x)$ не выходит из этой окрестности. Тогда x получит новое значение $x = x_0 + \Delta x$, а функция $f(x)$ получает новое значение $f(x_0 + \Delta x\ )$ и приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x\ ) - f(x_0)$ в точке x_0. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x\ ) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad (1)$$

то $f'(x_0)$ называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Разные обозначения производной функции $f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0), \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \qquad Df(x)|_{x=x_0}$$

Определяется понятия правой и левой производной в точке x_0, как

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x};\ f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad (2)$$

Очевидно что функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют правая и левая производные в точке x_0 и они равны.

Из (1) получаем $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ поэтому $\Delta f \to 0$ если $\Delta x \to 0$. Иными словами, если функция имеет производную в точке x_0 то она непрерывна в x_0.

Геометрический смысл производной: $f'(x_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой , задаваемой уравнением $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Действительно, пусть имеется кривая Г с уравнением $y = f(x)$ и в точке $M_0(x_0, f(x_0)) \in$ Г существует касательная M_0T к Г. Пусть $M\big(x, f(x)\big) \in$ Г; $x = x_0 + \Delta x$. Текущая M_0M составляет угол φ с осью $0x$; $\angle MM_0N = \varphi$; угол наклона касательная M_0T есть α т.е. $\angle TM_0N = \alpha$. Из рисунка имеем $\Delta x = M_0N = H_0H, f(x_0) = M_0H_0 = HN,\ f(x) = MH,\ \Delta f = MN.$ Очевидно что $\Delta x \to 0$ то $M \to M_0, \varphi \to \alpha$ поэтому $tg\varphi \to tg\alpha$ (1).

но $tg\varphi = \frac{MN}{M_0N} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$ (2), что из (1), (2)

следует $f'(x_0) = tg\alpha$ (3). Иными словами,

производная функции $f(x)$ в точке равна

коэффициенту угла касательной в этой точке к кривой , задаваемой уравнением $y = f(x)$.

Механическая интерпретация производной. *Производная $s'(t_0)$ от функции движения $s = s(t)$ от времени t есть мгновенная скорость движения в момент времени t_0.*

Действительно, пусть $s = s(t) -$ есть функция движения материальной точки, где $s(t) -$ расстояние, пройденное материальной точкой за промежуток времени t, отсчитывая с некоторого начала отсчёта времени. Тогда $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ есть расстояние, пройденное за промежуток времени Δt. По определению, **мгновенная скорость движения в момент времени $\mathbf{t_0}$** есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \quad (4)$$

Число $\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ называется средней скоростью движения за промежуток времени Δt. По опредедению производной (4) даёт нам $v(t_0) = s'(t_0)$. □

4.2. Производная сложной функции

Теорема 1.
Если $y = f(x), x = \varphi(t)$ −функции, такие что $f(x)$ дифференцируема в x_0, $\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0; где $x_0 = \varphi(t_0)$. *Тогда сложная функция*

$F(t) = f(\varphi(t))$ дифференцируема в t_0 причём имеется место следующей формулы

$$F'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0) \quad (5)$$

Или символически $y'(t) = y'(x)x'(t)$

Доказательство. Задать t_0 приращение Δt; функцпя $F(t)$ получит приращение $\Delta F = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = f(\varphi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0))$. Тогда функцпя $x = \varphi(t)$ получит приращение $\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) \Leftrightarrow x_0 + \Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t)$. По определению

$$F'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\varphi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \frac{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)}{\Delta t} = f'(x_0)\varphi'(t_0) \, \square$$

Пример 1. Применив (5) получим $(tgf(x))' = \frac{f'(x)}{cos^2 x}$ и $(f^{\alpha})' = \alpha f^{\alpha-1}(x) f'(x)$. Поэтому

$$\left(tg\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{cos^2\sqrt{1+x^2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \square$$

Практические занятия 1 час.

Упражнения: [3] 4.13; 4.18; 4.20; 4.21; 4.26.

Слова и выражения:

производная   đạo hàm;

дифференциал   vi phân;

приращение   số gia;

приращение независимой переменной   số gia biến độc lập;

приращение функции в точке   số gia hàm số tại một điểm;

правая производная   đạo hàm phải;

левая производная   đạo hàm trái;

геометрический смысл   ý nghĩa hình học;

механическая интепретация   minh họa cơ học;

угол наклона прямой   góc nghiêng của đường thẳng;

коэффициэнт угла прямой   hệ số góc của đường thẳng;

текущая   cát tuyến;

касательная   tiếp tuyến;

расстояние   khoảng cách, quãng đường;

за промежуток времени   trong khoảng thời gian;

скорость   vận tốc;

мгновенная скорость   vận tốc tức thời;

средняя скорость   vận tốc trung bình.

9- ая Лекция

Лек. 3 ч.+ Прак. 1 ч.

4.3. Производная обратной функции

Теорема 2.

Если $y = f(x)$ функция строго монотоно возрастает (убывает) и непрерывна на интервале (a, b), существует $f'(x_0)$ в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда обратная функция $x = g(y)$ также имеет производную $g'(y_0)$; где $y_0 = f(x_0)$, *которая вычисляется по следующей формуле*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (6)$$

Или символически

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} \quad (6.1)$$

Доказательство. Согласно теореме непрерывной обратной функции (3.3), на $[A, B]$; где $A = min_{x\in[a,b]} f(x)$, $B = max_{x\in[a,b]} f(x)$, существует непрерывная обратная функция $x = g(y)\big(\Leftrightarrow y = f(x)\big)$: $(A, B) \to (a, b)$ и в силу непрерывности функции $y = f(x)$ то $\Delta y \to 0$ когда $\Delta x \to 0$ и по предположению $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = g(y_0)$. Дадим y_0 приращение Δy тогда $x = g(y)$ получит приращение $\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$ или $g(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$ т.е. $f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$, отсюда по определению

$$x'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{(y_0 + \Delta y) - y_0}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x)} \ \square$$

Если обозначать $y = f^{-1}(x)$ есть обратная функция к $y = f(x)$ то (6) принимает вид

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (6.2)$$

Пример 2. Так как $y = arcsinx \Leftrightarrow x = siny$ то согласно (6.1)

$$y' = (arcsinx)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(arcsinx)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ \square$$

Пример 3. Функция $y = arctgx$ есть обратная функция к $y = tgx$ поэтому согласно (6.2)

$$y' = (arctgx)' = \frac{1}{\frac{1}{cos^2\,(arctgx)}} = \frac{1}{1 + tg^2\,(arctgx)} = \frac{1}{1+x^2}\ \square$$

4.4. Производная элементарных функций

Функции $c\ (const), x^n, a^x, log_a x, sinx, cosx, tgx, Arcsinx, Arccosx, Arctgx$ называются основными элементарными функцями. Функции, полученные из основных элементарных функций применением конечного числа арифметических операций или композиций функций называются элементарными функциями. Мы имеем следующую таблицу производных важных элементарных функций.

$$c' = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x lna \quad (a > 0)$$

$$(lnx)' = \frac{1}{x} \qquad (log_a x)' = \frac{1}{xlna}$$

$$(sinx)' = cosx \qquad (cosx)' = -sinx$$

$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x} \qquad (cotgx)' = \frac{-1}{sin^2 x}$$

$$(shx)' = chx \qquad (chx)' = shx$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x} \qquad (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

$$(arcsinx)' = -(arccosx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (arctgx)' = -(arcctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Кроме того, мы также имеем формулы производных соответствующих сложных функций если заменить в высших формулах x на $f(x)$, умножив множитель $f'(x)$. Например $(sinf(x))' = f'(x)cosf(x), (lnf(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, и т.д.

Практические занятия 1 час.

Упражнения: [3]. 4.28; 4.29; 4.35; 4.38; 4.43.

Слова и выражения:

причём ngoài ra; символически một cách hình thức.

иметь место следующей формулы công thức sau đây đúng;

10- ая Лекция

Лек. 2 ч.+ Прак. 2 ч.

4.5. Дифференциал.

Определение дифференциала: Если существует постоянная A, независящая от Δx, такая что

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (7)$$

то функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 функцией а линейное слагаемое $A\Delta x$ в (7) называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x)|_{x=x_0}$ или $df(x_0)$. Если обозначить $\Delta x = dx$ то по определению $df(x) = Adx$

<u>Теорема:</u> *Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 необходимо и достаточно чтобы $f(x)$ имела конечную производную в точке x_0. Тогда $A = f'(x_0)$ и $df(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$ или вообще*

$$df(x) = f'(x)dx \quad (8)$$

<u>Доказательство.</u> *Необходимость*. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда согласно (7), $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x \quad (\alpha \to 0$ если $\Delta x \to 0$). Разделив обе части последнего соотношения на Δx и взять предел когда $\Delta x \to 0$ мы получим $f'(x_0) = A$. (ч.и.т.д.)

Достаточность. Пусть существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Тогда по свойству БМ, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ что согласно (7) функция $f(x)$ дифференцируемой в точке x_0 причём $A = f'(x_0)$. □

Геометрический смысл дифференциала (см. геометрический смысл производной в 4.1).

$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x -$ Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 есть линейное приращение NT значения функции $f(x_0)$ при $x = x_0 + \Delta x$.

Действительно $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = M_0N.tg\alpha = NT$.

Свойства дифференциала. Из (8) и соответствующих свойств производных легко доказать следующие свойства дифференциала:

а) $d(u \pm v) = du \pm dv$

б) $d(uv) = vdu + udv$

в) $d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}, v \neq 0.$

4.6. Производная и дифференциал высших порядков.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) то $f'(x)$ определена на (a, b). Если функция $f'(x)$ снова дифференцируема на (a, b) то её производная называеся второй производной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Вообще производная n-ого порядка определяется

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \quad (9)$$

Методом математической индукции можно получать следующую формулу Лейбница

$$(uv)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \quad (10)$$

Аналонично определяется дифференциал n-ого порядка

$$d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right) \quad (11)$$

Инвариантность формы первого дифференциала: *Первый дифференциал не изменяет форму (8) когда x независимая или зависимая. Однако дифференциалы высших порядков имеют разные формы в случаях, когда x независимая и зависимая.*

Действительно, пусть $y = f(x), x = \varphi(t)$. Тогда $y = f\left(\varphi(t)\right)$ и $dy = \frac{d}{dt}\left[f\left(\varphi(t)\right)\right]dt = f'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = f'(x)dx$, так как $\varphi'(t)dt = dx$, что получили $dy = f'(x)dx$, ту же форму (8) в случае независимой переменной x. Однако $d^2y = d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2$в случае независимой переменной x, а

$d^2y = d\big(f'(x)\big)dx + f'(x)d^2x \neq f''(x)(dx)^2$ так как $d^2x = \varphi''(t)dt$ возможно отличается от нуля в случае зависимой $x = \varphi(t)$.

Производная функции, заданной в параметрической форме:

По свойству инвариантности первого дифференциала имеем

$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ (7); где функция $y = y(x)$ задаётся в в параметрической форме: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Практика 2 часа.

Упражнения: [3]. 4.80; 4.81; 4.83; 4.85

Слова и выражения:

элементарные функции   các hàm số sơ cấp;

основные элементарные функции   các hàm số sơ cấp cơ bản;

применять – применить (гл.)   áp dụng, ứng dụng (đt);

применение sự áp dụng, sự ứng dụng; вообще   nói chung.

операция   phép toán; важный   quan trọng (tt);

заменять – заменить (гл.)   thay thế (đt);

производная и дифференциал высших порядков   đạo hàm và vi phân bậc cao;

методом математической индукции phương pháp qui nạp toán học;

инвариатность   sự bất biến, tính bất biến;

инвариатность формы первого дифференциала   tính bất biến dạng của vi phân cấp một; зависимая переменная   biến phụ thuộc hay biến hàm;

независимая переменная   biến độc lập; параметр   tham số;

функция, задана в параметрической форме (или коротче функция в параметрической форме)   hàm số cho dưới dạng phương trình tham số.

11- ая Лекция
Лек. ч.
4.7. Основные теоремы дифференциального исчисления

Понятие локального эстремума*:* Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Говорят, что $f(x)$ достигает **локального максимума** в x_0 (или ещё говорят, что x_0 – точка локального максимума функции $f(x)$) если

$$\exists\delta > 0\ \forall x\ \big((0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \big(f(x) < f(x_0)\big)\big)$$

$f(x)$ достигает **локального минимума** в x_0 (или ещё говорят, что x_0 – точка локального минимума функции $f(x)$) если

$$\exists\delta > 0\ \forall x\ \big((0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \big(f(x) > f(x_0)\big)\big)$$

Точки локального максимума и локального минимума функции $f(x)$ называются точками **локального эстремума** функции $f(x)$.

Если в высших определениях берётся $f(x) \le f(x_0)$ или $f(x) \ge f(x_0)$ то получим понятия локального максимума или локального минимума функции $f(x)$ в широком смысле соответственно (сюда относится и функция, постоянная на (a,b)). Если нет необходимости различать точки локального эстремума и **локального эстремума в широком смысле** то мы скажем просто о точках **эстремума**.

<u>Теорема Ферма</u>: Если функция $f(x)$ *имеет производную в точке с и в этой точке достигает эстремума то* $f'(\mathrm{c}) = 0$.

Доказательство. Для определённости, пусть *c* – точка максимума. Так как $f(x) \ge f(c)$ то по определению производной $f'(\mathrm{c})$ то

$f'(\mathrm{c}+0) = \lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$; $f'(\mathrm{c}-0) = \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$ даст нам $f'(\mathrm{c}) = 0$. □

<u>Теорема Ролля</u>: Если функция $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$*, диффеценцируема в* (a,b) *и* $f(a) = f(b)$ *то существует* $\xi \in (a,b)$*, такая, что* $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $f(x) \neq const$. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ принимает максимальное и минимальное значение (Л9, Т.2): существует $x_1, x_2 \in [a, b]$; $f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$; $f(x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$. Легко видеть что, одно из чисел x_1, x_2, например $x_1 \in (a, b)$; иначе $x_1, x_2 \in \{a, b\}$ то $f(x) = f(a) = f(b)\ \forall x \in [a, b]$. Тогда функция $f(x)$ достигает экстремума во внутренней точке $\xi = x_1 \in (a, b)$. По теореме Ферма, тогда $f'(\xi) = 0$. □

Геометрический смысл теоремы Ролля.

Теорема Ролля утверждает, что существует точка $\xi \in (a, b)$ такая что касательная к графику функции в точке с абсциссой ξ параллельна оси Ох.

Пример 1. Найти точку $\xi \in (a, b)$ в теореме Ролля для функции $f(x) = x^2 - x$ на [0,1].

Легко видеть, что $f(0) = f(1) = 0; f'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \xi = \frac{1}{2}$ □

<u>Теорема Коши</u>: Если функции $f(x), g(x)$ *непрерывны на* $[a, b]$, *диффеценцируемы в* (a, b) *и* $g'(x) \neq 0$ в (a, b) *то существует* $\xi \in (a, b)$, *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (1)$$

Как следствие из теоремы Коши, в случай $g(x) = x$ мы получим следующую теорему о среднем Лагранжа

<u>Теорема Лагранжа</u>: Если функция $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *диффеценцируема в* (a, b) *то существует* с $\in (a, b)$, *такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\text{c})(b - a) \quad (2)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Теорема Лагранжа утверждает, что существует точка $\xi \in (a, b)$ такая что касательная к графику функции в точке с абсциссой ξ параллельна текущей *AB*, где $A(a, f(a)), B(b, f(b))$.

Пример 2. Найти точку $\xi \in (a,b)$ в теореме Лагранжа для функции $f(x) = x^2 - x$ на [1,2].

Легко видеть, что $A(1,0), B(2,2)$; $k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 2$; $f'(x) = 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = \xi = \frac{3}{2}$ □

4.8. Приложения дифференциального исчисления

4.8.1. Формула Тейлора

<u>*Теорема:*</u> *Пусть функция* $f(x)$ *определена на* $[a,b]$, *имеет непрерывные* $f^{(n)}(x)$ *на* $[a,b]$, *существуют* $f^{(n+1)}(x)$ в (a,b); $\alpha \in (a,b), x \in (a,b)$. *Тогда существует* с $\in (\alpha, x)$, *такая, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \quad (3)$$

(3) - Формула Тейлора с остаточным членом Лагранжа.

Доказано, что если *функция* $f(x)$ *дифференцируема (n-1) раз в окрестности точки* x_0 *и имеет производную* $f^{(n)}(x_0)$ *то имеется место следующая формула Тейлора с остаточным членом Пеано*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad (4)$$

Формула Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называеся формулой Маслорена

Формулы Маслорена некоторых элементарных функций:

i) $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ (5) (остаточный член Лагранжа $\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$)

ii) $sinx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n})$ (6)

(остаточный член Лагранжа $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} sin\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]; 0 < \theta < 1$)

iii) $cosx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$ (7)

(остаточный член Лагранжа $\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}cos\left[\theta x+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right]; 0<\theta<1$)

iv) $ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$ (8)

(остаточный член Лагранжа $\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$; $0<\theta<1$)

v) $(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n);\ \alpha\in\mathbb{R}$ (9)

(остаточный член Лагранжа $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}$)

Пример. Найти прелел $\lim_{x\to0}\frac{x-sinx}{x^3}$.

Заменяя, согласно (6), $sinx=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)$ получим

$$\lim_{x\to0}\frac{x-sinx}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{6}$$

4.8.2. Правила Лопиталя

<u>*Теорема 1:*</u> (*Раскрытие неопределённости вида* $\frac{0}{0}$):
Если $f(x), g(x)$ *функции, определённые и дифференцируемые и окрестности точки а, за исключения, быть может, самой точки а ,* $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$; $g(x), g'(x)\neq0$ *в окрестности точки а и существует конечный или бесконечный предел* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. *Тогда* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (1). До определим $f(a)=g(a)=0$ то мы получим что, $f(x), g(x)-$ непрерывны в $[a,x]$, дифференцируемы в (a,x), поэтому применив теорему Коши, существует $\xi\in(a,x)$ ($x\to a$ то $\xi\to a$) чтобы $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Взяв предел обе части последнего мы получим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A\ \square$$

Пример 1. $\lim_{x\to0}\frac{x-sinx}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}$ $\square$

<u>Теорема 2:</u> (Раскрытие неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$): Если $f(x), g(x)$ функции, определённые и дифференцируемые и окрестности точки а, за исключения, быть может, самой точки а , $\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \lim_{x\to a} g(x) = \infty$;
$g(x), g'(x) \neq 0$ *в окрестности точки а и существует конечный или бесконечный предел* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. *Тогда*
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A$. (Без док-ва)

Пример 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ □

Замечание:

1. Условие $x \to a$ можно заменить условием $x \to \infty$ (или $x \to \pm\infty$)
2. Существование предела $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ в теоремах 1 и 2 есть достаточное условие существования предела $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A$ но не необходимое.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 sin\dfrac{1}{x}}{sinx} = \lim_{x\to 0} xsin\frac{1}{x} = 0$$

Но предел $\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2 sin\frac{1}{x}\right)'}{(sinx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}}{cosx}$ не существует, так как не существует предела $\lim\limits_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$ а $\lim\limits_{x\to 0} xsin\frac{1}{x} = 0$.

3. Можно многократно применять правила Лопиталя:

Пример 4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} = 0$ для всех $\alpha > 0, a > 1$

Пусть $k \in \mathbb{Z}, k \geq [\alpha] + 1$. Если к раз применять правило Лопиталя 1 то мы получим $\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{a^x(lna)^k} = 0$, так как $(\alpha - k) < 0, a^x(lna)^k x^{k-\alpha} \to +\infty$ □

4. Неопределённости видов $\infty.0, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ легко привести к высшим видам. Действительно символически имеем следующие правила:

$$\infty.0 = \frac{1}{0}.0 = \frac{0}{0}; \infty - \infty = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0};\ 1^\infty = e^{\infty ln1} = e^{\infty.0};$$

$$0^0 = e^{0ln0} = e^{0.\infty};\ \infty^0 = e^{0ln\infty} = e^{0.\infty}$$

Слова и выражения:

основные теоремы дифференциального исчисления   các định lý cơ bản về hàm khả vi;

локальный максимум   cực đại địa phương;

локальный минимум   cực tiểu địa phương;

локальный эстремум cực trị địa phương;

для определённости   để cho xác định;

абсцисса   hoành độ;

ось абсцисс   trục hoành;

ордината   tung độ;

ось орданат   trục hoành;

апликата   cao độ (theo trục Oz);

ось апликат   trục cao độ (trục Oz).

приложение   ứng dụng, áp dụng;

формула Тейлора   công thức Taylo (Taylor);

формула Маслорена   công thức Macloran;

остаточный член   phần dư, số dư;

формула Тейлора с остаточным членом Лагранжа công thức Taylo phần dư Lagrange;

формула Тейлора с остаточным членом Пеано   công thức Taylo phần dư Peano;

формула Тейлора с остаточным членом Коши   công thức Taylo phần dư Cosi (Cauchy);

правила   các qui tắc;

правила Лопиталя   các qui tắc Lopitan (L’Hospital).

раскрытие неопределённости   khử dạng bất định

многократно   nhiều lần

приводить – привести (к чему)   đưa đến (cái gì)

12- ая Лекция
Л2+Пр2
Лек. 2 ч.

4.8.3. Исследование функций с помощью производной

а) <u>Условия возрастания и убывания функции</u>

Понятие точки возрастания и убывания функции:

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Говорим, что $f(x)$ **возрастает в точки** x_0 если $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 и $f(x)$ убывает в точки x_0 если $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0.

*Лемма (*Достаточное условие возрастания и убывания функции в точке *):* *Если $f(x)$ дифференцируема в точки x_0 и $f'(x_0) = c > 0$ то $f(x)$ возрастает в точки x_0 а $f'(x_0) = c < 0$ то то $f(x)$ убывает в точки x_0.*

Доказательство:

Пусть $f'(x_0) = c > 0$, тогда $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c > 0$ поэтому существует некоторая октестность точки x_0, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ - означает $f(x)$ возрастает в точки x_0

Пример 1. Пример функции, которая возрастает в точке но не возрастает в окрестности (ОЛ2. с.161):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} - x^2 sin\dfrac{1}{x} \text{ если } x \neq 0 \\ 0 \text{ если } x = 0 \end{cases}$$

Действительно $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} - 2xsin\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} > 0 - f(x)$ возрастает в точки 0, тогда как при $x \neq 0, f'(x) = \frac{1}{2} - xsin\frac{1}{x} + cos\frac{1}{x}$, для $x_k = \frac{1}{k\pi}(k = 1,2,\dots), f'(x_{2k+1}) = \frac{3}{2}, f'(x_{2k}) = -\frac{1}{2}$ поэтому функция меняет свойство монотонности в любой окрестности точки 0.

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на $[a,b]$ если $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$; называется **убывающей** на $[a,b]$ если $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$; называется **неубывающей** на $[a,b]$ если $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$; называется

невозрастающей на $[a, b]$ если $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Теорема 1: Пусть функция $f(x)$ непрерывна $[a, b]$, дифференцируема на (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была неубывающей [невозрастающей] на $[a, b]$ необходимо и достаточно чтобы и $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ [$f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a, b)$]. (ОЛ1. с.144)

Доказательство. *Достаточность:* Пусть $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$. По теореме Лагранжа $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \exists \xi \in (x_1, x_2)$ $\big(f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)\big)$ так что $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$ т. е. $f(x_2) \geq f(x_1)$ □

Необходимость: Пусть $f(x)$ неубывающая на $[a, b]$, но существует $\xi \in (a, b)$, $f'(\xi) < 0$ тогда $f(x)$ убывает в ξ, $x_1 < \xi$ следует $f(x_1) > f(\xi)$, что противоречит тому, что $f(x)$ неубывающая на $[a, b]$.

Теорема 2: Пусть функция $f(x)$ непрерывна $[a, b]$, дифференцируема на (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была возрастающей [убывающей] на $[a, b]$ необходимо и достаточно чтобы и $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ [$f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a, b)$] и кроме того $f'(x)$ не равна нулю тождественно ни на каком интервале $(a_1, b_1) \subset [a, b]$. (без док-ва) (ср. с ОЛ.1- с.123, 144).

Следствие (Vien): Пусть функция $f(x)$ непрерывна $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), такая что уравнение $f'(x) = 0$ имеет только конечные числа решений в (a, b). Тогда для того чтобы $f(x)$ была возрастающей [убывающей] на $[a, b]$ необходимо и достаточно чтобы и $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ [$f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a, b)$].

b) Локальные эстремумы. Наибольшие и наименьшие значения.

Понятие локальных эстремумов (или просто эстремумов) были введено из лекции 15 (§4.7).

Точки *x*, для которых $f'(x) = 0$ называются **стационарными точками**.

Теорема 3: (Первое достаточное условие эстремума):

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и если

$f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] *на* $(x_0 - \delta, x_0)$,

$f'(x) < 0$ [$f'(x) > 0$] *на* $(x_0, x_0 + \delta)$

То x_0 − есть точка локального максимума [локального минимума] функции $f(x)$. Если $f'(x)$ не меняет знака через x_0 то $f(x)$ не имеет локального экстремума в x_0.

Доказательство:

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ по теореме Лагранжа

$\exists c_1 \in (x, x_0)$ $f(x_0) - f(x) = f'(c_1)(x_0 - x) > 0$ если $x_0 - x > 0$;

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $\exists c_2 \in (x_0, x)$ $f(x) - f(x_0) = f'(c_2)(x - x_0) < 0$ если $x - x_0 > 0$. Таким образом $f(x_0) > f(x)$ для всех x из проколотой окрестности точки x_0, что означает x_0 − есть точка локального максимума функции $f(x)$. Аналогичко для локального минимума.

Если $f'(x)$ не меняет знака через x_0 , например $f'(x) > 0$, тогда по теореме Лагранжа

$\forall x_1 \in (x_0 - \delta, x_0) \exists c_1 \in (x_1, x_0)$ $f(x_0) - f(x_1) = f'(c_1)(x_0 - x_1) > 0$. Аналогичко

$\forall x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$ $\exists c_2 \in (x_0, x_2)$ $f(x_2) - f(x_0) = f'(c_2)(x_2 - x_0) > 0$

Так что $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ когда $x_1 < x_0 < x_2$, функция $f(x)$ не имеет локального экстремума в x_0.

Теорема 4: (Второе достаточное условие эстремума):

Пусть $f'(x_0) = 0$ и существует $f''(x_0)$. Тогда:

1) *если $f''(x_0) < 0$, то x_0 точка локального максимума;*
2) *если $f''(x_0) > 0$, то x_0 точка локального минимума.*

Доказательство:

1) Так как $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ убывает в x_0 т.е. $f'(x)$ меняет знак + на − через x_0. Поэтому по теореме 3, x_0 точка локального максимума.
2) Аналогично.

Теорема 5: (Третье достаточное условие эстремума):

Пусть

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0, f^{(2k)}(x_0) \neq 0$$

Тогда:

1) *если $f^{(2k)}(x_0) < 0$, то x_0 точка локального максимума;*
2) *если $f^{(2k)}(x_0) > 0$, то x_0 точка локального минимума.*

Доказательство: Пользоваться формулой Тейлора (ОЛ.1- с. 146)

c) <u>Выпуклость и точки перегиба:</u> ((ОЛ1. с. 151; (ОЛ.2 - с. 187)))

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх** (**выпуклой**) на интервале (a, b), если график функции лежит под касательной для любой точки этого интервала.

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз** (**вогнутой**) на интервале (a, b), если график функции лежит над касательной для любой точки этого интервала.

Точка $x_0 \in (a, b)$ называется **точкой перегиба** графика функции $f(x)$ если существует проколотая $\delta -$окрестность точки x_0 такая, что в разных полуокрестностях точки x_0 график функции имеет разные направления выпуклости.

С некоторыми изменenями определить понятия выпуклости фукции на сегменте $[a, b]$.

Теорема 6: (необходимое условие перегиба)

Если функция $f(x)$ имеет $f''(x_0)$ и $x_0 -$ точка перегиба то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 7: (достаточное условие перегиба)

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, такая , что $f''(x_0) = 0$ и $f''(x)$ меняет знак через x_0 то $x_0 -$ точка перегиба

d) <u>Асимптоты:</u> понятие вертикальной асимптоты, наклонной асимптоты (как в школьном курсе математики)

Практические занятия 2 часа.

Упражнения: [3] 5.4; -9; -12; -18; -22; -29; -30; 4.52; 4.56; 4.92; 4.94; 4.96

Слова и выражения:

возрастание   sự tăng;

убывание   sự giảm;

функция возрастает в точке, в интервале, в сегменте   hàm số tăng tại một điểm, trên một khoảng, trên một đoạn;

функция убывает в точке, в интервале, в сегменте   hàm số giam tại một điểm, trên một khoảng, trên một đoạn;

возрастающая функция   hàm số tăng;

убывающая функция   hàm số giảm;

наибольшее значение   giá trị lớn nhất;

наименьшее значение   giá trị nhỏ nhất;

стационарная точка   điểm dừng;

выпуклось   sự lồi, tính lồi;

вогнутость   sự lõm, tính lõm;

выпукло вверх функция (выпуклая функция)   hàm số lồi trên (≡ hàm số lồi);

выпукло вниз функция (вогнутая функция)   hàm số lồi dưới (≡ hàm số lõm)

асимптота   tiệm cận;

вертикальная асимптота   tiệm cận đứng;

горизонтальная асимптота   tiệm cận ngang;

наклонная асимптота   tiệm cận xiên.

13- ая Лекция
Прак. 4 ч.

4.8.4. Построение графика функции

Обшая схема исследования графика функции. Для исследования графика функции нам нужно проводить следующие работы:

- Найти область определения функции, сделать замечания о симметричности графика.
- Найти асимптоты: вертикальные, наклонные (в том числе и горизонтальные);
- Исследовать поведения функции по знаку производной;
- Исследовать выпуклость функции, найти точки перегиба;
- Найти некоторые особые точки, такие как точки пересечения с осьями координат, с асимптотами, и т.д.
- Нариссовать график функции

Примеры исследования графика функции, заданной в явном виде, в параметрической форме, в полярой форме (GTV tr.39).

Пример 1. Исследовать поведение и построить график функции, заданной в явной форме:

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}$$

Область определения: $\mathbb{R}$,

Асимптоты: две горизонтальные асимптоты $y = \pm 1$

$y' = (3-x)(x^2+3)^{-3/2} = 0 \Leftrightarrow x = 3;$

точка максимума $A\left(3, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

$y'' = (2x^2 - 9x - 3)(x^2+3)^{-5/2} = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{4}$

Точки перегиба $U_{1,2}\left(\frac{9 \pm \sqrt{105}}{4}, \sqrt{\frac{13 \pm \sqrt{105}}{18}}\right)$

Особые точки: $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right); C(1,1)$

Пример 2. Нарисовать график функции, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t + \dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$$

Область определения: $\forall t \neq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2$

Асимптоты: Наклонная асимптота $y = x\ (t \to \infty)$,

при $t \to 0$ нет асимптоты.

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t^2+t+1}{t(t^2-1)}$; $y''_x = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{\left(x'_t\right)^3} = \frac{-2t-1}{(t^2-1)(t+1)^2}$

$y''_x = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$; точка перегиба

$U\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$; $y'_x(U) = -2$,

касательная в точке U имеет коэффициент $k = -2$

При $t = -1, M_1\left(-2, -\frac{1}{2}\right), y'_x(M_1) = \infty$, касательная в M_1 параллельна оси Oy.

При $t = 1, M_2\left(2, \frac{3}{2}\right), y'_x(M_2) = \frac{3}{2}$, касательная в M_2 имеет коэффициент $k = \frac{3}{2}$.

Пример 3. Построить график функции, заданной в полярной форме:

$$r = \frac{a}{\varphi} \quad (a > 0, r > 0)$$

Имеем $\begin{cases} x = \frac{a}{\varphi} cos\varphi \\ y = \frac{a}{\varphi} sin\varphi \end{cases}$

Асимптоты: горизонтальная асимптота $y = a$ так как $\lim_{\varphi \to 0} x\,(\varphi) = \infty$, $\lim_{\varphi \to 0} y\,(\varphi) = a$.

$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{sin\varphi - \varphi cos\varphi}{cos\varphi + \varphi sin\varphi} = 0 \Leftrightarrow$

$tg\varphi = \varphi -$ касательные параллельны оси Ox.

$tg\psi = \frac{r}{r'} = -\varphi$; $tg\psi|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}, \psi = -57^0$;

$tg\psi|_{\varphi=\pi} = -\pi, \psi = -72^0$;

$tg\psi|_{\varphi=2\pi} = -2\pi, \psi = -89{,}8^0 \approx 90^0$

Упражнения: [3] 4.53; 4.54; 4.59; 4.60; 4.64; 4.68; 4.69; 4.80; -82; -83; -86; -94; -96.

Упражнения: [3] 5.87; -89; -94; -101; -102.

Слова и выражения:

схема   sơ đồ;
Обшая схема исследования графика функций   sơ đồ tổng quát khảo sát hàm số;
функция, заданная в явной форме   hàm số cho dưới dạng hiện;
функция, заданная в параметрической форме   hàm số cho dưới dạng tham số;
функция, заданная в полярной форме   hàm số cho dưới dạng tọa độ cực;
симметричности графика   tính đối xứng của đồ thị;
строить – построить график функции   dựng đồ thị hàm số;
построение   sự xây dựng;
рисовать – нарисовать график функции   vẽ đồ thị hàm số;
исследовать   khảo sát, nghiên cứu;
исследование поведения функций   sự khảo sát biến thiên của hàm số;
исследовать поведение функций   khảo sát biến thiên hàm số;
область определения   miền xác định;
область значений   miền giá trị;
особые точки   các điểm đặc biệt.

14- ая Лекция

Лек. 2 ч.+ Прак. 2 ч.

5. Исследование общего уравнения второго порядка на плоскости

5.1. Движения Декартовой системы координат

- Декартово прямоугольная система координат Oxy
- Параллельный сдвиг на $I(a,b)$: $Oxy \to Ix'y'$ по формуле

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \quad (1)$$

- Вращение на угол α ($\alpha > 0$ – против часовой стрелки): $Oxy \to Ox'y'$ по формуле

$$\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases} \quad (2)$$

5.2. Общее уравнение второго порядка и его инварианты

Для удобства применить язык Геометрии мы зовём x – точкой; $x \in \mathbb{R}^2$.

Общим уравнением второго порядка на плоскости является уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\,a_{13}x + 2\,a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (3)$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Совокувность всех точек на плоскости, которая удовлетворяет уравнению (3) называется кривой второго порядка.

1. Можно показать, что при применении движений (1), (2) над Декартово прямоугольной системой координат, следующие числа являются инвариантами:

$$J_1 = a_{11} + a_{22};\ J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Действительно, при преобразовании (1), подставив $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$ в (3), мы получим новое уравнение $a'_{11}{x'}^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}{y'}^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{13} = 0$; где $a'_{11} = a_{11}, a'_{12} = a_{12}, a'_{22} = a_{22}$ поэтому конечно J_1, J_2 не изменяются т.е. остаются инвариантами. А при преобразовании (2), подставив $\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$ в (3), мы получим новое уравнение $a'_{11}{x'}^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}{y'}^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{13} = 0$; где

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11}cos^2\alpha + 2a_{12}sin\alpha cos\alpha + a_{22}sin^2\alpha \\ a'_{12} = (a_{22} - a_{11})sin\alpha cos\alpha + a_{12}(cos^2\alpha - sin^2\alpha) \quad (4) \\ a'_{22} = a_{11}sin^2\alpha - 2a_{12}sin\alpha cos\alpha + a_{22}cos^2\alpha \end{cases}$$

тогда, легко видедь, что $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$ т.е. $J_1 -$ инвариант, а $\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}cos^2\alpha + 2a_{12}sin\alpha cos\alpha + a_{22}sin^2\alpha)(a_{11}sin^2\alpha - 2a_{12}sin\alpha cos\alpha + a_{22}cos^2\alpha) - \big((a_{22} - a_{11})sin\alpha cos\alpha + a_{12}(cos^2\alpha - sin^2\alpha)\big)^2 = a_{11}a_{22}(sin^4\alpha + cos^4\alpha + 2sin^2\alpha cos^2\alpha) - a_{12}^2(sin^4\alpha + cos^4\alpha + 2sin^2\alpha cos^2\alpha) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ т.е. $J_2 -$ инвариант.

2. Случай, когда $J_2 > 0$ уравнение (3) называется уравнением *эллиптического типа*; Случай, когда $J_2 < 0$ уравнение (3) называется уравнением *гиперболического типа* а когда $J_2 = 0$ уравнение (3) называется уравнением *параболического типа*.

3. Если $J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ то кривая, описываемая уравнением (3) имеет центр симметрии $I(x_0, y_0)$; где (x_0, y_0) удовлетворяет системе

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Действительно, когда $J_2 \neq 0$, делая параллельный сдвиг на $I(x_0, y_0)$: $Oxy \to Ix'y'$ по формуле $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ из (3) мы получаем новое уравнения без слагаемых первой стенени x', y': $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0 \quad (3)'$ потому что тогда, по предположению (4), $a_{11} = a'_{11}, a_{22} = a'_{22}$, $a_{12} = a'_{12}$, $a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$, $a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$. Если теперь в уравнении (3)’ сделать замену x' на x'', y' на y'' одновременно то ясно что уравнение (3)’ не меняет вид, что означает $I(x_0, y_0) -$ начало новой системы координат $Ix'y'$ есть центр симметрии заданной кривой (3) в новой системе координат $Ix''y''$. Но свойство быть центром симметрии кривой, конечно, не изменяется в различных системах координат.

4. При вращении системы координат Oxy к $Ox'y'$ на угол α ($\alpha > 0$ – против часовой стрелки) по формуле (2) с условием

$$cotg2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \quad (a_{12} \neq 0) \quad (6)$$

то $a'_{12} = (a_{22} - a_{11})sin\alpha cos\alpha + a_{12}(cos^2\alpha - sin^2\alpha) = 0$ поэтому из (3), после преобразования (2) мы получим новое уравнения без слагаемого смешанного произведения $x'y'$.

Практические занятия 2 часа.

Упражнения: [6] 4.2.8; -9; -10 a, b, c.; -11a, d.

Слова и выражения:

исследование общего уравнения второго порядка на плоскости khảo sát phương trình tổng quát bậc hai trên mặt phẳng;

движение chuyển động;

движения Декартовой системы координат các chuyển động của hệ trục tọa độ Decac;

параллельный сдвиг на (a, b) tịnh tiến song song đi (a, b);

вращение на угол α quay đi một góc α;

вращение системы координат на угол α quay hệ trục tọa độ đi một góc α;

общее уравнение второго порядка phương trình tổng quát bậc hai;

инварианты các bất biến;

преобразования các biến đổi.

уравнение эллиптического типа phương trình dạng Elip;

уравнение гиперболического типа phương trình dạng Hypebol;

уравнение параболического типа phương trình dạng Parabol;

цетр симметрии tâm đối xứng; слагаемое số hạng;

слагаемое смешанного произведения *xy* số hạng có tích trộn *xy*.

15- ая Лекция

Л2+Пр2
Лекция 2 часа.

5.3. Приведение общего уравнения второго порядка к каноническому виду

Канонический вид уравнения второго порядка на плоскости это такое вид уравнения (3), в котором каждая переменная входит в уравнение либо в квадрате либо в первой степени. Такие уравнения как, каноническое уравнение Эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, каноническое уравнение Гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, или каноническое уравнение Параболы: $y^2=2px$.

Случай 1. Если $J_2 \neq 0$ то сначала по (5) параллельным сдвигом (1) к центру симетрии $I(x_0, y_0)$ свести уравнение к виду без линейнных слагаемых а потом вращением системы координат по формуле (2) так, чтобы имеется (6)

привести уравнение к виду без слагаемого смешанного произведения переменных а это последний вид уже канонический.

Случай 2. Если $J_2=0$ то сначала вращением системы координат по формуле (2) так, чтобы имеется (6) свести уравнение к виду без слагаемого смешанного произведения $x'y'$ а потом сделать параллельный сдвиг к каноническому виду.

Пример. Движениями системы координат привести следующее уравнение к каноническому виду

$$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0 \quad (1.1)$$

Здесь $J_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=-16<0$, поэтому уравнение (1.1) является уравнением гиперболического типа; Согласно (5) кривая имеет центр симметрии $I(2,-1)$. Теперь сначала сделаем параллельный сдвиг на $I(2,-1)$ по формуле

$$\begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'-1 \end{cases} \qquad (1.2)$$

из (1.1) получим $3{x'}^2 + 10x'y' + 3{y'}^2 - 8 = 0 \quad (1.3)$ (в системе координат $Ix'y'$). После (1.2), теперь сделаем поворот системы $Ix'y'$ на угол α к системе IXY, такой что $cotg2\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$. По формуле (2)

$$\begin{cases} x' = Xcos\alpha - Ysin\alpha = \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}} \\ y' = Xsin\alpha + Ycos\alpha = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (1.4)$$

из (1.3) мы получим каноническое уравнение

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1 \quad (1.5)$$

-это каноническая Гипербола оси IX с полуосями $a = 1, b = 2$.

Таким образом каноническая система координат уравнения (1.1) есть система координат IXY с началом $I(2, -1)$, полученная из первоначальной системы координат *Oxy* двумями движениями по очереди (1.2) и (1.4).

Движения (1.2), (1.4) даёт нам суммарное движение

$$\begin{cases} x = \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}} + 2 \\ y = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} - 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Замечание. Можно привести (1.1) к каноническому виду , сначала применить поворот *Oxy* к $Ox'y'$ на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ по формуле $\begin{cases} x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (1.2)'$

тогда из (1.1) мы получим

$$8x'^2 - 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' - 13 = 0 \text{ или } \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(y + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \quad (1.3)'$$

Теперь в системе $Ox'y'$ мы сделаем параллельный сдвиг на $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$ по формуле $\begin{cases} x' = X + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = Y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $(1.4)'$ то из (1.3)' получим каноническое уравнение $X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1$ как (1.5). Подставив $(1.4)'$ в $(1.2)'$ мы получим прежнее суммарное движение (1.6)

$$\begin{cases} x = \dfrac{X - Y}{\sqrt{2}} + 2 \\ y = \dfrac{X + Y}{\sqrt{2}} - 1 \end{cases}$$

из которого видно что IXY есть каноническая система координат уравнения (1.1) с началом $I(2, -1)$.

5.4. Классификация линий второго порядка

Имеем следующие канонические уравнения:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 -$ Эллипс (мнимый Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ или точка: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$);

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 -$ Гипербола оси *Ox* (Гипербола оси *Oy* или уравнение двух пересекающихся прямых: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$);

$y^2 = 2px -$ Парабола оси *Ox* (Парабола оси *Oy* или уравнение двух параллельных прямых: $y^2 = 1$)

Практические занятия 2 часа.

Упражнения: [6] 4.2.12a, b, g.

Слова и выражения:

приводить – привести đưa đến, dẫn đến;

приведение уравнение к каноническому виду đưa phương trình về dạng chính tắc;

каноническое уравнение phương trình chính tắc;

каноническая система координат hệ trục tọa độ chính tắc;

начало системы координат gốc tọa độ;

полуоси các bán trục;

поворот ≡ вращение   sự quay, phép quay;
прежний   như trước đây;
суммарное движение   chuyển động tổng hợp;
классификация   sự phân loại;
классификация линий второго порядка   phân loại các đường cong bậc hai;
мнимый Эллипс   Elip ảo.

Литература

Пн	Наименнование литер.	Автор	Год изд.	Изд-ство	Гос-ство
1.	Лекции по М.А.	Г.И. Архипов В.А.Садовничий В.Н.Чубариков	1999	МГУ	Россия
2.	Высшая математика. Том I, II.	Бугров Я.С. Никольский С.М.	1980, 1981	Наука – Москва	Россия
3.	Сборник задач по М.А. 1.	Вьен Н.С.	2005	Лекуйдон	Вьетнам
4.	Сборник задач по курсу М.А.	Г.Н. Берман	1985	Наука – Москва	Россия
5.	Задачник	Бугров Я.С. Никольский С.М.	1982	Наука – Москва	Россия
6.	Сборник задач по АГ & ЛА	Вьен Н.С.и др.	2010	QĐND	Вьетнам

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ